Actas IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, Vol. I
Universidad de Salamanca, 1982

SERIES DE POTENCIAS DE UNA FUNCIÓN:

Manuel Díaz Regueiro Lugo

Abstract: It's studied the variable's change in the power series.

1)Operadores

Sean f, g, p,... funciones reales de variable real. El operador F=p (x)D se aplica de tal forma que F(f)=p(x) f'(x); F^2(f)=p(x)(p'(x)f'(x)+ p(x)f''(x)); y, en general $F^n(f)=(p(x)D)^n(f)$

Propiedades: F(f+g)=F(f)+F(g); F(cf)=cF(f); F(cte)=0; F(fg)=gF(f)+fF(g).

Sea F= 1/p'(x) D, siendo p(x) una función tal que p'(x) existe y no se anula en [a,b). Entonces F(p)=1; $F(p^n)=n\,p^{n-1}$.

2) Si f(x) es derivable en [a,b],con f(a)=f(b) ,entonces, existe un c $\in$(a,b) tal que F(f)(c)=0.

Dem. : Por el teorema de Rolle existe un c $\in$ (a,b) tal que f'(c)=0 $\Rightarrow$f'(c)/p'(c)=0

3) Dadas dos funciones f ,g, definidas y derivables en [a,b], existe un c$\in$ (a., b) tal que (f(b)-f(a))F(g) (c)=(g(b)-g(a))F(f)(c).

Dem.: Usando el teorema de Cauchy y dividiendo por p'(c),

Si ahora, además , p(x) $\in$ C^{n+1} (a, b) ,

4) Dada una función f$\in C^{n+1}$[a,b] , $\exists$c$\in$ (a,b) tal que f(b)=f(a)+ F(f)(a)(p(b)-p(a))+

$$\frac{F^2(f)(a)(p(b)-p(a))^2}{2!}+\dots+\frac{F^n(f)(a)(p(b)-p(a))^n}{n!}+\frac{F^{n+1}(f)(c)(p(b)-p(a))^{n+1}}{(n+1)!}$$

Demostración:

Sea h(x)=f(b)-f(x)-F(f)(x)(p(b)-p(x))-$\frac{F^2(f)(x)(p(b)-p(x))^2}{2!}$ -....- $\frac{F^n(f)(x)(p(b)-p(x))^n}{n!}$

Si calculamos F(h(x))=0-F(f)(x)- F^2(f)(x)(p(b)-p(x))+F(f)(x)*1-F^3(f)(x)(p(b)-p(x))^2/2!+F^2(f)(x)(p(b)-p(x))-.........- F^{n+1}(f)(x) (p(b)-p(x))^n/n!=

$$=\frac{-F^{n+1}(f)(x)\,(p(b)-p(x))^n}{n!}$$

Como h(b)=0, eligiendo otra función g(x) tal que g(b)=0, y que sea derivable en [a, b], por 3, $\frac{h(b)-h(x)}{g(b)-g(x)}=\frac{F(h)(c)}{F(g)(c)}$, siendo c un punto entre b y x.

de donde, $\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{F(h)(c)}{F(g)(c)}$

Si g(x)=(p(b)-p(x))$^{n+1}$,tenemos,

$$\frac{h(x)}{(p(b)-p(x))^{n+1}}=\frac{-F^{n+1}(f)(c)(p(b)-p(c))^n/n!}{-(n+1)(p(b)-p(c))^n}$$

de aquí, $h(x)=\frac{F^{n+1}(f)(c)(p(b)-p(xc))^{n+1}}{(n+1)!}$, haciendo x=a, obtenemos el resto,

$h(a)=\frac{F^{n+1}(f)(c)(p(b)-p(a))^{n+1}}{(n+1)!}$ c.q.d.

Otras fórmulas del resto pueden ser deducidas variando g(x).

Ejemplos:

x= 1+$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ (x^3-1) +$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ $(x^3-1)^2$ +$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ $(x^3-1)^3$ +.......... F=$\frac{1}{3x^2}D$;a=1

2) $x^4 = 4 + 4(x^2-2) + 2\frac{(x^2-2)^2}{2!}$ $\quad F = \frac{1}{2x}D$; $a = \sqrt{2}$

3)

$x^5 = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}(x^2-2) + \frac{15\sqrt{2}}{4}\frac{(x^2-2)^2}{2!} + \frac{15\sqrt{2}}{8}\frac{(x^2-2)^3}{3!} + ...$ $F = \frac{1}{2x}D$; $a = \sqrt{2}$

4) $e^x = 1 + \ln(1+x) + (\ln(1+x))^2 + 5\frac{(1n(1+x))^3}{3!} + 15\frac{(1n(1+x))^4}{4!} + ...$ F=(1+x)D; a=0.

5) $e^{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2!} + \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{x^2}{4!} + ...$ F=2$\sqrt{x}$ D; a=0.

6)

ln(n+x)=ln n+ $2\left(\frac{x}{2n+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5 + ...\right)$ $\quad F = \frac{(2n+x)^2}{2n}$;a=0

7) senx=sen1 +cos1 lnx +(cos1-sen1) $\frac{(\ln x)^2}{2!} - 3sen1\frac{(\ln x)^3}{3!} + ...$ F=xD; a=1

8)

$e^x = 1 + \arctan x + \frac{(\arctan x)^2}{2!} + 3\frac{(\arctan x)^3}{3!} + ...$ F=$(1+x^2)$D; a=0

En todos estos ejemplos, la validez de la fórmula está condicionada a que x pertenezca a una región de convergencia de la serie ,y más precisamente, sea un punto próximo a a.

Series de potencias de funciones compuestas

Para hallar el desarrollo en serie de f(g(x)), además del método tradicional de sustituir en el desarrollo en serie de f(x) el desarrollo en serie de potencias de g(x), podemos utilizar las series anteriores para ese cálculo, haciéndose, en general, de un modo más breve .

Ejemplos:

$e^y = e + e\ln y + 2e\frac{(\ln y)^2}{2!} + 5e\frac{(\ln y)^3}{3!} + 15e\frac{(\ln y)^4}{4!} + 52e\frac{(\ln y)^5}{5!} + ...$F=yD

de donde deducimos que $e^{e^x} = e + e\,x + 2e\frac{x^2}{2!} + 5e\frac{x^3}{3!} + 15e\frac{x^4}{4!} + 52e\frac{x^5}{5!} + ...$

siguiendo el proceso:

Si desarrollamos f(y)=$\sum a_n \frac{(g^{-1}(y))^n}{n!}$ entonces esos coeficientes a_n son los mismos que los de f(g(x))= $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ .Dicho esto con todas las limitaciones que comporta utilizar la inversa de g, g^{-1}(su campo de existencia, derivabilidad, etc. .,

Otros ejemplos:
Del ejemplo 7 deducimos que:

$$sen\, e^{x} = sen1 + \cos 1x + (\cos 1 - sen1)\frac{x^2}{2!} - 3sen1\frac{x^3}{3!} + ...$$

Del 8:

$$e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2} + ...$$

Serie de potencias de la función inversa

Un caso particular de lo que hemos visto es el desarrollo en serie de potencias de p(y) de la función y ; $y = \sum a_n \frac{(p(y))^n}{n!}$ (siempre que ello sea posible), entonces, si x=p(y), obtenemos el desarrollo en serie de potencias de x de $p^{-1}(x) = \sum a_n \frac{x^n}{n!}$, la función inversa de p.

Ejemplos :

Dada $y=x^x$ (definida cuando x>0); si $F = \frac{x^{-x}}{(\ln x + 1)} D$; a=1

$x=1+(x^x-1)-(x^x-1)^2+5(x^x-1)^3/3!+$ ...., de donde,
$x=1+(y-1)-(y-1)^2+5(y-1)^3/3!+$....... Otro:
Sea $y=x^m-1$;

$$x=1+\binom{\frac{1}{m}}{1}(x^m-1)+\binom{\frac{1}{m}}{2}(x^m-1)^2+\binom{\frac{1}{m}}{3}(x^m-1)^3+...$$

$F = \frac{1}{mx^{m-1}} D$; a=1. Ahora $x=\sqrt[m]{1+y} = 1 + \binom{\frac{1}{m}}{1} y + \binom{\frac{1}{m}}{2} y^2 + \binom{\frac{1}{m}}{3} y^3 + ...$

Desarrollos asintóticos

Para aproximar una función por un desarrollo limitado $a_o+a_1/x+a_2/x^2+a_3/x^3+.....$ $...+a_n/x^n$ podemos utilizar 4 de tal modo que, en este caso, $F=-x^2D$ y entendamos

$$F(f)(a) = \lim_{x \to \infty} F(f)(x)$$

Igualmente podríamos hablar de F=1/p'(x) D para otros desarrollos asintóticos en los que su escala de comparación sean potencias de la función p(x).
La ventaja es que ahora tenemos fórmula para el resto R_n lo que permitirá una mejor acotación del error, o bien, si la serie es divergente, podemos intentar evaluar cuando R_n se hace mínimo, y, por lo tanto, cuantos términos habrán de utilizarse para que el desarrollo limitado sea óptimo.
Ejemplo:

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + R \qquad R = e^{\frac{1}{c}}\frac{1}{2!x^2}$$

Regla de L'Hopital

Si en 4 consideramos el límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{p(x) - p(a)}$ obtenemos $\frac{f'(a)}{p'(a)}$ (p'(a)≠0) una versión de la regla de L'Hopital. Utilizando la fámula 4 también obtenemos

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{\mathrm{f(x) - f(a)}}{\mathrm{p(x) - p(a)}} - \frac{f'(a)}{p'(a)}}{(p(x) - p(a))^2} = \frac{f''(a)p'(a) - p''(a)f'(a)}{2!(p'(a))^3}$$

BIBLIOGRAFIA

1) Dieudonne, Jean. *Cálculo infinitesimal*. OMEGA . Madrid, 1971.

2) K. Knopp *Infinite Sequences and Series*. Dover Publications, Inc. New York. 1956

3) Erdélyi, A. *Asymptotic Expansions*. Dover, New York, 1987.