



LUMES, COMPLEXIDADE, INTELIXENCIA E LINEARIDADE

Manuel Díaz Regueiro

Centro de Formación e Recursos de Lugo

Resumo

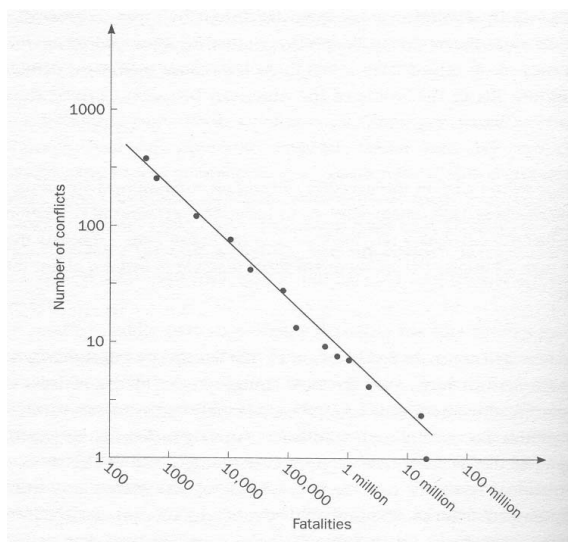
Hai un novo paradigma: a teoría da complexidade, que é quen de explicar o funcionamento de Internet, os terremotos, as transicións de fase entre a orde e o caos, ... Neste artigo abórdase a explicación desde esta teoría, da ubicuidade da lei de potencia, de fenómenos tan diversos como os incendios, a emerxencia da intelixencia colectiva, e relaciónase coa linearidade.

Abstract

There is a new paradigm: the complexity theory, that is able to explain the operation of Internet, earthquakes, the transitions of phase between the order and the chaos... In this article approaches the explanation from this theory, of the ubiquity of the power law, of as diverse phenomena as the fires, the emergency of collective intelligence, and they are related to the linearity.

Brevemente, a complexidade é un novo paradigma. É sabido que os físicos divídense entre os partidarios da existencia dunha teoría de supercordas e os que consideran que -como non é unha teoría falsable, no sentido de Popper, experimental-, por moi bonitas matemáticas que conteñan, non é certa (ou ben nunca saberemos se o é). Stephen Hawking, que estaría máis ben entre os primeiros ao declarar hai pouco que a complexidade é o paradigma da física do século XXI, pon a teoría nun marco adecuado, a pesar de que é moito máis recente que a teoría de supercordas. Moitos resultados non teñen máis de dez anos.

QUE É E COMO SE VE UNHA "POWER LAW"



Cando un fenómeno segue na súa frecuencia de ocorrencia unha "lei de potencia", verase unha distribución semellante á que se reflicte na imaxe do lado. Neste caso o exemplo está extraído de "Ubiquity"[2], a biblia máis clara da complexidade e da lei de potencia. O gráfico relaciona a frecuencia das guerras co número de mortos en cada unha delas e sorprende o perfecto axuste a unha recta dos valores recollidos. Como se pode apreciar, en ambos casos, fálase en termos de logaritmos, tanto neste exemplo como en todos os que menciono ao longo deste artigo. Pois iso mesmo veremos se facemos a representación da enerxía dun terremoto e o número de veces que tivo lugar un terremoto con esa característica ao longo dunha serie de anos (lei de Gutenberg-Richter), ou número de incendios nos que se consumiron un determinado número de hectáreas.

Apuntan así a unha pauta universal, de natureza estatística e aleatoria, cuxo modelo universal ben podería ser (e así o reflicte a portada de Ubiquity) un montón de area que vamos aumentando, botándolle grans; e no que se producen periodicamente pequenas avalanchas. Se rexistramos nun gráfico a frecuencia de avalanchas dun determinado tamaño (nº de grans que se desprazan) veremos unha lei de potencia: a lei de potencia "canónica". Como rexistrar o número de grans de area non é moi doado, aínda que se fan experimentos físicos, a maioría fanse co ordenador.

Hai moitas maneiras de presentar o tema da complexidade. Case cada libro que fala dela faino desde unha focaxe distinta. Así Holland [10] presenta a complexidade como algo que emerxe a partir dun número pequeno de elementos sometidos a regras simples, "os xogos de mesa son exemplos

simples da emerxencia dunha grande complexidade a partir de regras simples”, “A emerxencia ocorre en sistemas que son xerados nun ordenador. O sistema está composto de copias de relativamente un pequeno número de compoñentes que obedecen a leis simples”. Claro que este autor, é recoñecido mundialmente como o pai dos algoritmos xenéticos. Mentres que [3] e [8] falan da complexidade como a fronteira entre o caos e a orde, as transicións de fase entre caos e a orde.

Apetéceme pensar que o texto que vén a continuación tivo influencia sobre a situación política relativa aos incendios en Galicia e posibilitou a chegada a acordos dos tres partidos galegos reflectida na foto do 5-10-2006 na Voz. En todo caso algunhas das frases deste texto foron reproducidas en discusións na TVG e nas conclusións derradeiras díxose “Paz llegó a comparar la respuesta a unos fuegos tan excepcionales con la que se daría a un maremoto. «Ningún pode dicir que as costas galegas estean exentas dun tsunami”. A Voz de Galicia, á quen tamén llo remitín, obviou estas ideas, pero negouse a aceptar que as matemáticas tiveran que ver co fenómeno e culpabilidade.

Analfabetismo numérico e matemático

As investigacións de moitos comentaristas arroxoaron moita escuridade sobre este tema e é probable que, se eles continúan, pronto non saberemos absolutamente nada acerca del.

(Mark Twain)

Dentro de 10 anos, volvendo a vista atrás, veremos con sorpresa e incredulidade a cifra das 35000 persoas que, donas dunha especial emoción, se manifestaron en Santiago o 17 de setembro de 2006 seguindo as directrices do PP, un partido responsable.

É posible que ao lector o embargue a sorpresa e supoña que o que estou facendo é unha afirmación atrevida e partidista. Imos ver que non é así.

Está claro que unha manifestación dirixida a pedir responsabilidade a calquera goberno da Xunta polos terremotos que se produciran en Galicia ou que se produzan no futuro non terían nin 5 asistentes. Por qué? Porque todo o mundo coñece que os terremotos non están causados polos políticos senón pola historia xeolóxica e os movementos telúricos dunha zona determinada. Ademais sabe ou intúe que non é posible determinar por ningún método científico cando vai ocorrer un gran terremoto ou sequera se o próximo terremoto vai ser grande ou pequeno. Así que é absurdo que se esixa aos gobernos que estean preparados para un terremoto de grado 8 na escala de Richter: a) porque vai ser moi improbable que se produza; e b) porque esa preparación permanente é moi custosa e será un dispendio durante centos de anos.

Canto de improbable? A lei de Gutenberg-Richter sina-

la que cando un terremoto A ten o dobre da enerxía da dun terremoto B, A é 4 veces menos probable que B. Postos nunha escala o logaritmo da enerxía e o logaritmo da frecuencia dos terremotos desa ou maior enerxía, veremos representada unha recta perfecta. A isto chámase que o fenómeno segue unha “lei de potencia”. Quen segue unha lei de potencia dese tipo? Pois centos de fenómenos como a lei de Pareto, de Zipf, os incendios forestais, os cracks económicos, as avalanchas, as epidemias, os best-sellers, os terremotos, as extincións de especies animais e vexetais, a ocorrencia de tormentas, o tamaño das empresas, o tamaño das cidades, a riqueza das persoas, o tamaño das guerras ...

A nós interésannos os incendios de Galicia: seguen unha lei que di que, se colocamos o logaritmo das hectáreas consumidas polo lume no eixo das X e no eixo das Y o logaritmo da súa frecuencia, veremos que segue unha lei de potencia. A representación é unha recta perfecta de pendente negativa tal e como a da imaxe, que indica que cando dobramos as hectáreas consumidas o lume é 2,48 veces menos probable...

Así unha “gran queima” é altamente improbable e é imposible determinar cando se está no medio dela. É impredecible, polo tanto, e non se produce “culpabilidade” de ningún tipo. É obvio que inflúe a historia anterior: un bosque xa queimado non se queima ao ano seguinte.

Todos estes fenómenos que se rexen por unha “lei de potencia” teñen as mesmas características: fenómenos que se conducen pola historia anterior, que non teñen dependencia da “culpabilidade”, que son impredecibles por principio (xa nos gustaría predicir a marcha da bolsa, xa...). A solución lóxica é a seguinte: se quere lumes pequenos que non se propaguen a grandes áreas, poña os cortalumes suficientes en todo o territorio, poña remedio á estrutura social de abandono do campo; faga o que o PP non fixo desde 1982, desde cando de modo case ininterrompido gobernou Galicia.

É certo que este non é un coñecemento que estea nos libros de texto escolares de secundaria, é un coñecemento que ten unhas poucas decenas de anos (con excepción da lei de Pareto unha centena, de Richter, 60 anos). Pero tamén se podería chegar a razoar correctamente usando a lóxica: algún comentarista en Galicia xa sinalou a lei de funcionamento que fai inútil toda estratexia contra o lume baseada unicamente en apagar os lumes durante anos –sen remediar as causas para os grandes–; o que aumenta é a probabilidade de que se produza un “gran incendio”, xa que as madeiras velhas e ignífugas se acumularán provocando un combiado explosivo.

En xeral, o analfabetismo numérico é debido a que o que o ten non sabe aplicar sequera unha lei de proporcionalidade ou lei linear. Aquí deberíamos falar dun hipernumerismo linear, ao estarmos aplicando a linearidade a un fenómeno que non a ten e ademais ligando variables que non están

relacionadas: se un incendio dunha hectárea ten 1 unidade de culpabilidade, 77000 hectáreas queimadas son 77000 unidades de culpabilidade o cal non só esixe a dimisión senón un castigo exemplar pola culpa cometida. Risible analfabetismo numérico....

Bibliografía rápida (en Internet)

<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v26n2/a04v26n2.pdf>
<http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/mundo.html>
<http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/capitulos/01/01-14.shtm>
<http://www.minas.upm.es/inicio/FGS/trabajos/04a05.htm>
http://www.latorres.org/enrique/self_org_syst.htm
http://www.exploraciencia.profes.net/ver_noticia.aspx?id=5749
<http://www.plazacapital.org/articulo.php?articulo=225>
<http://www.hpl.hp.com/research/idl/papers/ranking/ranking.html>
Percolación en <http://www.allegue.com/artigos>

A INTELIXENCIA E A INTELIXENCIA MANIPULADORA

Podemos relacionar a teoría da complexidade coa educación?

En [7] cóntase o que pasa se as estatísticas son demasiado boas. Como exemplo toma ao psicólogo Cyril Burt, que nos 50 estudou a correlación entre o CI dos xemelgos univitelinos. Se a natureza determina os CIs, entón existiría unha alta correlación entre os CI de xemelgos criados en familias diferentes. O resultado foi de 0,771, moi alto, e mostra a forte influencia dos xenes. Pero o que levantou sospeitas foi que noutros experimentos posteriores Burt acadase a mesma cifra 0,771 para un experimento similar. Cinco anos despois da súa morte, Burt foi considerado culpable de fraude pola Sociedade británica de Psicoloxía. Pero iso non rematou coa polémica. É ou non é o CI herdable?

Libros sobre xenes e ambiente, como *El misterio de los genes*¹ ou *Genes organismo e ambiente*, ou [5] cóntannos unha historia na que intervén Galton², quen pertence a unha sociedade euxenista británica e é un difusor da teoría da boa raza. Esta estendeuse nas primeiras décadas do século XX a Alemaña e deu lugar ao nazismo. O que fan os nazis sobre a busca de espécimens escollidos xa está predeterminado nos escritos de Galton e das sociedades euxenistas británicas.

Contan tamén que efectivamente -e contra a maior parte das ideas da esquerda- hai unha influencia total dos xenes no CI. Que quere dicir? Que o CI está ben como medida única dunha persoa? Todos sabemos, despois de ler a *Intelixencia Emocional* de Goleman, que non é a única medida referente nin debería ser a única capacidade a estimular.

É certo que se poden dar combinacións xenéticas que produzan un alto CI. Así hai relación (correlación) CI-xenes, pero moito menos CI-éxito na vida, ou se se quere felicidade. Non sei se existirá moita correlación CI-altruísmo. E entón, non pode influír a educación no CI? Pois realmente, segundo eses libros, case nada. Tiran máis os xenes que a educación.

Realmente como profesores todos sabemos que hai determinados rapaces e raparigas que non necesitan docentes, “son como esponxas”, e segundo este punto de vista non hai nada que facer con estes tampouco

Para non desesperar e cambiar de carreira xa, porque resulta que, desde esa perspectiva, o noso ensino decide moi pouco, fagámolo moi ben ou marabillosamente mal, poderemos mirar por outro lado e ver como hai fenómenos que dependen do contaxio das ideas, da proximidade e das redes. Realmente unha grande maioría de fenómenos segundo se describe en moitos libros desde hai pouco (20 anos) dependen da relación, do contaxio, da avalancha, da multitude, do entusiasmo. Tamén dentro da teoría da complexidade, temos que a lei de Pareto apunta a existencia dunha distribución 80-20 (0 80 por cento da riqueza -ou do que sexa dun país sempre está en mans do 20 por cento das persoas), tamén na Lei de Gutenberg-Richter sobre terremotos (1935), nos lumes, incluso dá unha explicación sobre a presunta racionalidade da Lei de Adam Smith, quen cría que os homes tomaban as decisións racionalmente e por egoísmo; e como os egoísmos se contrarrestan, saía o ben común....

As teorías do contaxio apuntan a que en determinadas situacións a xente se deixa contaxiar polos demais, polo que dá lugar a fenómenos de avalancha estilo crack da bolsa, terremoto e lumes. Ser intelixente nese mundo de complexidade non é ter bo CI senón saber manipular e contaxiar ben. Para aderezar esta idea, en vez de manipular poderíamos falar de chegar máis lonxe, máis distante, nas relacións sociais, nas redes humanas.

Así non son os máis ricos ou os que máis publican os que teñen mellor CI. Aquí renace un pouco o sentido da Educación. Se resulta que sexa como sexa, o contaxio, o entusiasmo, a educación pode facer cousas que o CI non dá, os traballos colectivos, a transmisión de coñecementos entre iguais, etc...cambian a situación. O que importa na teoría da complexidade son as redes, polo que as relacións humanas son fundamentais. Por moi elevado que sexa o CI dunha persoa non podemos esquecer que esa persoa pode ter moitas outras carencias. É na relación e no intercambio interpersonal onde nace algo que vai máis aló. Na literatura, por exemplo, [10], “emerxe”.

Habería que completar co que di Steve Jonson [9] sobre a definición de emerxencia: cambio que ocorre desde abaixo. Cando suficientes elementos individuais interactúan entre eles e se organizan entre eles, o resultado é intelixencia colectiva, incluso aínda que ninguén estea ao mando. É

un fenómeno que existe a cada nivel de experiencia e revolucionará o modo en que vemos o mundo.

Así que, ademais de falar da intelixencia individual, deberíamos de preocuparnos das intelixencias colectivas moito máis potentes e esperanzadoras.

Por último lembraremos que unha das medallas Fields do ano pasado, das entregadas en Madrid, foron a ese tema, á complexidade, exactamente a Wendelin Werner polo seu tratamento matemático de fenómenos críticos como a percolación.

Bibliografía

A bibliografía pretende amosar que non se trata dunha “extraña teoría” senón a máis actual, de moda -só chega con ver o número de títulos que a tratan- e con moita repercusión en tan amplos campos como física, bioloxía, matemáticas, economía, computación, socioloxía,....

[1] Roger Lewin: *Complejidad, el caos como generador del orden*. Metatemas 41. Tusquets editores. Barcelona, 2002.

[2] Mark Buchanan: *Ubiquity, the science of history... or why the world is simpler than we think*. Phoenix. London, 2004.

[3] Ricard Solé and Brian Goodwin: *Signs of Life. How Complexity pervades Biology*. Basic Books. New York, 2000.

[4] Réda Benkirane e outros: *La Complexité, vertiges e promesses 18 histoires des sciences...* Editions le Pommier. París, 2006. (para os francófonos)

[5] Matt Ridley: *Genoma. La autobiografía de una especie en 23 capítulos*. Taurus. Madrid, 2000.

[6] Dean Hamer, e Peter Copeland: *El misterio de los genes*. Vergara Buenos Aires, 1998.

[7] Tob Eastway & Jeremy Wyndham: *How long is a piece of string. More hidden mathematics of everyday life*. Robson Books. London, 2003.

[8] Stuart Kauffman: *Investigaciones*. Metatemas. Tusquets Editores. Barcelona, 2003.

[9] Steve Jonson: *Emergence*. Penguin Books. London, 2002.

[10] John H. Holland: *Emergence: From Chaos to Order*. Oxford University Press. New York, 2000.

[11] John H. Holland: *El orden oculto. De cómo la adaptación crea la complejidad*. Fondo de Cultura Económica. México, 2004.

[12] Phillip Ball: *The Self-made Tapestry: Pattern Formation in Nature*. Oxford University Press. New York, 2004.

[13] Gribbin, John: *Así de Simple: El Caos, la Complejidad y la aparición de la vida*. Editorial Critica.

Outros

Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order

(Penguin Press Science S.)

Small World: Uncovering Nature's Hidden Networks
Creating Contagious Commitment: Applying the Tipping Point to Organizational Change

The Secrets of Word-of-mouth Marketing: How to Trigger Exponential Sales Through Runaway Word of Mouth
Critical Mass: How One Thing Leads to Another

Turtles, Termites and Traffic Jams: Explorations in Massively Parallel Microworlds (Complex Adaptive Systems S.)

Emergence: The Connected Lives of Ants, Brains, Cities and Software

The Collapse of Chaos: Discovering Simplicity in a Complex World (Penguin Science)

En Internet

Sandrine Ballenegger e outros (2004): *Etudes sur les jumeaux*. Université de Lausanne

WHY IGNORE THE G FACTOR?

<http://bussorah.tripod.com/nyborg.html>

IMITANDO A WRONSKI NUN UNIVERSO LINEAR LENDO [4] A EXPERIENCIA MATEMÁTICA

Menos coñecida do que a de Grassman ou a de Ramanujan é a historia de Jozef Maria Wronski (1776-1853), cuxa personalidade e xenio combinaban elementos que ían desde a inxenuidade pretenciosa até ao xenio que raiaba a loucura. Hoxe Wronski é principalmente lembrado por un certo determinante formado a partir de n funcións.

Este determinante está relacionada coas teorías de independencia linear e é importante para o estudo da teoría das ecuacións diferenciais lineares. Todos os estudantes de ecuacións diferenciais xa ouvirán falar do wronskiano.

Wronski foi un polaco que combateu ao lado de Kosciuszko pola independencia da Polonia, tendo, non entanto, dedicado o seu libro, Introduction a la philosophie des mathématiques et technie de l'algorithmie, á Súa Maxestade Alexandre I, autócrata de todas as Rusias. Un realista político, presúmese.

No 15 de Agosto de 1803 Wronski tivo a revelación que lle permitiu concibir «o absoluto». O seu traballo matemático e filosófico posterior foi conducido pola vontade de expor o absoluto e as súas leis unificadoras.

Alén da súa filosofía e matemática, Wronski dedicábase á teosofía, ao mesianismo político e cultural (escribiu cinco libros sobre este tema), promoveu as ideas do aritmofismo, do vitalismo matemático e de algo ao que chamaba «secheliano» (do hebreo sechel = razón). Este último pretendía transformar o cristianismo de relixión revelada en relixión demostrada. Wronski distinguía tres forzas que controlarían a historia: a provi-

dencia, o destino e a razón. Baseou case todo o seu sistema na negación do principio da inercia. Non existindo inercia no mundo material, este non podería competir co mundo espiritual. O ideal científico sería unha especie de panmatematismo que unificaría o coñecemento da formación dos sistemas matemáticos como as leis que gobernan os seres vivos.

A «grande lei da xeración de cantidades», que contén a chave do universo, xorde como ecuación (7). Wronski vendeuna a un banqueiro rico. O banqueiro non lla pagou e Wronski manifestou publicamente o seu desagrado. Eis a grande lei:



$$F_x = A_0 \Omega_0 + A_1 \Omega_1 + A_2 \Omega_2 + A_3 \Omega_3 + \dots$$

Que significa? Parece ser un esquema xeral de expansión de funcións como combinación linear doutras funcións, unha especie de expansión de Taylor xeneralizada que contén todas as expansións pasadas e tamén todas as expansións futuras.

Eu teño na historia de Wronski unha certa lonxana referencia. Evidentemente se un mira o que teño escrito pode ver que hai moitas e variadas xeneralizacións das series de Taylor, un certo pracer ao estilo Wronski en recrear novas variantes da serie de Taylor. (Aínda que os creadores das wavelets fan o mesmo). Pero nunca crin que fose nin sequera a chave das nozes, canto máis ser a chave do universo. É certo que me quedan outros seis artigos por escribir que xeneralicen ou desenvolvan novos aspectos da serie de Taylor (aínda que é fatigado o asunto e son moi poucas as persoas interesadas no tema). Así que adoptaremos unha postura Wronskiana e máxica e saltamos un deses seis artigos, escribindo este **metateorema**:

Sexa F un operador k -linear (é dicir $F(g*h) = F(g)*F(h)$, onde $*$ é a operación que cumpre que $g*h = k^{-1}(k(g)+k(h))$)

Entón a solución de $F(y) = y$ ven dada por:

$$y = \prod_{n=-\infty}^{\infty} F^n(a), \text{ sendo } a \text{ un valor apropiado.}$$

Uf!, supoño que até o mesmo Wronski tería neste momento esgotadas as neuronas. Sen embargo se recorremos ao caso clásico de operadores lineares como a derivada común e vulgar, chegamos sen dubidalo ao desenvolvemento en serie de e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$ e outros sen ningún problema incluso para un lector non atento á xogada.

Como o demostraríamos? A verdade é que por tautoloxía, se a é un valor apropiado, se existe (é converxente) e podemos falar de $y = \prod_{n=-\infty}^{\infty} F^n(a)$, entón podemos falar (ou comprobar que é solución de $F(y) = y$) de:

$F(y) = F(\prod_{n=-\infty}^{\infty} F^n(a)) = \prod_{n=-\infty}^{\infty} F^n(a) = y$
cando (ao menos se) a serie $\prod_{n=-\infty}^{\infty} F^n(a)$ cumpra teoremas “ad hoc” de converxencia uniforme. Advertiredes que este resultado despraza a visión que todos temos da serie de Taylor como aproximación local por una visión de aproximación formal no infinito a un punto fixo dun operador linear. É máis abstracta, e polo tanto menos intuitiva, e polo tanto probablemente ninguén a contou, se acaso o precedente que coñezo está en Hardy [2]

Pero non só para os casos clásicos, podemos adiviñar, e non o vou facer para non encher este texto de borróns, que nos van aparecer fórmulas como traídas do mesmo confin do universo e do confin dos horrores. Sexa en derivadas parciais, sexa nunha variable, sexa como operadores lineares abstractos, sexa como diferenzas finitas. É verdade que xa podo ver un montón de dificultades, de definicións e de problemas para aplicar esa fórmula abstracta e un pouco caída polos pelos a un caso concreto. Ou así estarán pensando a maioría dos lectores neste momento. Así moitos verán a cantidade de aplicacións contractivas, de teoremas de Arzelá, de converxencia uniforme para a integración, para a derivación con outros múltiples matices e pequenas diferenzas, etc.

Deixemos ao tempo pñer no seu sitio a tautoloxía anterior, e o seu significado e a falar do significado da linearidade, que si está mellor e máis próximo das nosas aulas. En todos os libros sobre caos falan da non linearidade, nalgún deles [6] conta como en poucos anos pasou a palabra “non-linear” de non existir a estar presente como nome de libros e revistas e como explicación do caos (sigo a pensar que o libro de James Glick sobre o caos é o mellor de divulgación nese campo, aínda sendo antigo).

É certo, nunhas matemáticas lineares non é posible a existencia do caos. Eu sempre comezo as clases sobre sistemas de ecuacións lineares en 2º de Bacharelato preguntando, por que estudamos ese tema. Tras unha pausa, respondo: porque as matemáticas lineares son as fáciles, son máis fáciles que as non lineares das que sabemos apenas pouco ou nada. Cando resolvemos un problema non linear, como o do péndulo, o primeiro que facemos é linearizalo, aproximalo. A linearización é o sistema máis usado para a resolución por métodos aproximados dun problema non linear. A propia derivada o é, é un método de linearización.

Pero é que en realidade as autovías e autopistas son estradas nas que se produce unha forte linearización local. Para que o condutor guíe case sempre en liña recta, use a inercia e non teña que facer fortes desviacións, facemos pontes e pontes para evitar as baixadas e subidas. Así viaxamos en liña recta. De ser preciso facer curvas, convertémolas en curvas moi suaves, pouco pronunciadas, que podemos percorrer sen diminuír a velocidade, como se fosemos en liña recta.

Estamos entón querendo converter a natureza non linear e caótica en linear e domesticada. Poderemos? En moitos artigos anteriores de GAMMA (como entendendo as medias e dous máis dous son cinco) tentei mostrar como é posible converter a suma noutra operación isomorfa. Neste, sinalo que é posible desenmascarar como efectivamente lineares procesos e teoremas de aparencia non linear. Noutro momento poderíase relacionar tamén a complexidade como o “bordo do caos”, pechando o ciclo.

Bibliografía

[1] Yu Takeguchi (1976): *Sucesiones y Series*, Limusa, México.

[2] G. H. Hardy (1973): *Divergent Series*, Oxford at the Clarendon Press.

[3] Yu. Shaskin (1991): *Puntos Fijos*, Lecciones populares de Matemáticas, Mir, Moscú.

[4] Philip J. Davis e Reuben Hersh (1995): *A Experiencia Matemática*, Gradiva, Lisboa.

[5] D. R. Smart (1974): *Fixed Point Theorems*, Cambridge tracts in mathematics, Cambridge University Press.

[6] Edwards N. Lorenz (2000): *La esencia del caos*, Debate, Barcelona.

Notas

¹ Neste libro lese que “Los puntajes del CI tienen una correlación de 0,86 entre gemelos idénticos criados juntos, comparada con el 0,75 entre gemelos separados al nacer. La diferencia de 11 por ciento se debe al ambiente”.

² O capítulo do cromosoma 21, de [5], Eugenesia, dá conta extensamente deste tema.
