GAMMA
setembro 2002

Serie de factoriales de la función exponencial y aplicaciones al cálculo de raíces y potencias.

Manuel Díaz Regueiro. IES Xoán Montes.

Notación. Como notación (no estándar) utilizaré que $x^{(n}=x(x-1)(x-2)....(x-n+1)$ y que $x^{n)}=x(x+1)(x+2)....(x+n-1)$. Y que $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ y $\nabla f(x)=f(x)-f(x-1)$.

Origen de las series de factoriales. Podemos llegar a ellas por tres vías:

1) Utilizando las series de interpolación de Newton podemos suponer que:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n f(0)\frac{x^{(n}}{n!} \quad y \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\nabla^n f(0)\frac{x^{n)}}{n!},$$

teniendo en cuenta que las series definirán una función en todos aquellos valores de x para los cuales las series sean convergentes. Y las fórmulas serán válidas si sus restos verifican que $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$.

Ejemplo, si $f(x)=a^x$

$$\Delta f(x)=a^x(a-1) \quad \Delta^n f(0)=(a-1)^n \quad y \quad \nabla f(x)=a^x\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

que nos darán las fórmulas [1] e [2], expresadas más adelante.

2) Estas fórmulas se pueden deducir de la serie binómica $(1-z)^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n)}}{n!}z^n$, que para $z=\frac{a-1}{a}<1$ da

$$a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n\frac{x^{n)}}{n!}$$

[2]; y de $(1+z)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n}}{n!}z^n$ que para $-1<z=a-1<1$ da [1] $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}(a-1)^n\frac{x^{(n}}{n!}$.

Estudiando la convergencia de [1] vemos que es convergente si $0<a<2$. Para $a=2$ será convergente si Re $x>0$ (es convergente si $|z|<1$, y absolutamente convergente para $|z|=1$ si Re $x>0$). En cuanto a la [2] será convergente para cualquier x real si $a>1/2$. Para $a=1/2$, es convergente si Re $x<0$ (convergente si $|z|<1$, y absolutamente convergente para $|z|=1$ si Re $x<0$) . Por la fórmula del resto se deduce que, a igual *p* y *x*, en general, el resto será menor cuanto más próximo a 1 esté *a* por tener una potencia de ln*a*.

3) Utilización de la transformada en **z**.

La transformada en **z** de a^x es $\frac{z}{z-a}$, y la de $\frac{x^{(n}}{n!}$ es $\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$. Como

$$\frac{z}{z-a}=\frac{z}{z-1}\frac{1}{1-\frac{a-1}{z-1}}=\frac{z}{z-1}\left(\sum\left(\frac{a-1}{z-1}\right)^n\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a-1)^n\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Hallando la transformada inversa obtenemos [1]. Así que tenemos, con la transformada en **z**, una máquina de hacer series de factoriales. Por ejemplo:

$$\frac{(x+1)^{m)}}{m!}a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{a^{n+m+1}}\frac{(x+1)^{n+m)}}{(n+m)!}\frac{(m+1)^{n)}}{n!}$$

$$\frac{x^{(m}}{m!}a^x=\sum_{n=0}^{\infty}a^{m-1}(a-1)^n\frac{x^{(m+n}}{(n+m)!}\frac{m^{n)}}{n!}$$

sin más que hallar la transformada en **z** de la función, desarrollarla en serie y calcular la transformada en **z** inversa que nos da la serie buscada.

Ahora aplicarémos las fórmulas al cálculo de potencias y raíces.

Vimos que las fórmulas [1] $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}(a-1)^n\frac{x^{n)}}{n!}$

son convergentes $\forall x \in R$ si 0<a<2, y [2] si a>1/2. Como ejemplos,

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x^{n)}}{n!}, \quad 5^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{x^{n)}}{n!}$$

$$\text{e } 3^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \frac{x^{(n}}{n!}.$$

Las fórmulas del segundo tipo se hacen finitas para valores enteros negativos del exponente.

$$5^{-3} = 1 - \frac{4}{5}.3 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \frac{3.2}{2!} - \left(\frac{4}{5}\right)^3 \frac{3!}{3!}$$

y, además, dan fórmulas para

$p \in N$ de las C_p^n o de las CR

Ejemplos:

$$10^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n CR_p^n \text{ y } 7^{-p} = \sum_{n=0}^{p} \left(-\frac{6}{7}\right)^n C_p^n$$

Vamos a ver ahora como se utilizan estas series para el cálculo de raíces o potencias de un número (similar y, en cierto modo, igual a la utilización de la serie binómica para ese cálculo).

$$\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n)}}{n!}$$

Como ya vimos, la fórmula de la serie de factoriales a^x convergerá más rápidamente si la base es más próxima a 1. De aquí, si, por ejemplo, tenemos que calcular $\sqrt[5]{100}$ y sabemos que una aproximación es 2, desarrollaremos

$$\sqrt[5]{\frac{100}{32}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{68}{100}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}$$

, de donde,

$$\sqrt[5]{100} = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{68}{100}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}\right)$$

.Si tomamos como aproximación 2,5, tenemos,

$$\sqrt[5]{\frac{100}{2,5^5}} = \sqrt[5]{\frac{10^7}{9765625}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{234375}{10^7}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}$$

de donde

$$\sqrt[5]{100} = 2,5\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{234375}{10^7}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}\right)$$

Del mismo modo puede hacerse tomando como aproximación 2,51 o 2,5118.

Si tomamos aproximaciones por exceso (pero garantizando siempre que la base de la exponencial sea mayor que 0,5), la serie resulta alternada, con lo que se facilita el cálculo del error, que es menor que el valor absoluto del último término desechado. En el caso anterior, las aproximaciones serán 2,6 o bien 2,52, etc. Por ejemplo:

$$\sqrt[5]{100} = 2,6\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-0,1881376)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}\right)$$

Bibliografía.

DÍAZ REGUEIRO, M. “Algunhas notas sobre as series de factoriais $x^{(n}$”. *VIII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas*. Coimbra (1981).

Automática I. UNED. Madrid. (1976).

MARKUSEVITCH. *Teoría de las funciones analíticas*. Editorial Mir. Moscú. (1978).

HENRICI, PETER. *Elementos de cálculo numérico*. Editorial Trillas. México. (1972).

ABELLANAS. *Elementos de Matemáticas*. Madrid. (1970).