Los ajustes de mínimos cuadrados. Problemas de la vida real con Mathematica para 1º de Bachillerato

Manuel Díaz Regueiro

Este trabajo para el curso de Mathematica de la Thales se realiza recreando un artículo de Math Teacher (indirectamente) y del último artículo de la Bibliografía, un antiguo artículo en SIGMA 24. Se trata de recrear el artículo cambiando Derive por Mathematica para comprobar su usabilidad en estos problemas. Como resultado es posible ver que se puede realizar perfectamente en Mathematica.

- - Objetivos.
- - Contenidos.
- - Actividades propuestas.
- - Actividades de evaluación.

Objetivos

Formular hipótesis, experimentos diseños, recopilar e interpretar los datos y evaluar hipótesis haciendo inferencias y sacar conclusiones sobre la base de las estadísticas (rango, media, mediana y modo) y tablas, gráficas y tablas.

Identificar los usos comunes y usos inadecuados de la probabilidad o el análisis estadístico en el mundo todos los días ..

Modelizar una situación real usando tecnología.

Utilizar la curva de ajuste para determinar la relación entre, y hacer predicciones a partir de, los conjuntos de datos y ser conscientes de sesgo en la interpretación de los resultados

Describir las relaciones del mundo real representados por gráficos y tablas de valores

Actividad propuesta.

Se presenta la actividad titulada VENTA DE CAMISETAS, cuya idea original está tomada de la revista Mathematics Teachers, en la que se plantea una situación que se resuelve con la ayuda del programa Derive.

Si los alumnos ya conociesen el programa lo utilizarían como un asistente para analizar y resolver las distintas situaciones y si no, se podría utilizar la actividad como recurso para ir introduciendo las diferentes órdenes y posibilidades que nos ofrece Mathematica.

VENTA DE CAMISETAS

Los alumnos del Instituto tiene previsto organizar un viaje de fin de curso, para lo cual organizarán diversas actividades con el fin de obtener dinero para financiarlo.

Tú formas parte de la comisión que se encargará de la venta de camisetas conmemorativas. Habéis contactado con la fábrica que os surtirá de camisetas para conocer su lista de precios y después queréis fijar el precio de venta de cada camiseta de forma que el beneficio logrado sea máximo.

La fábrica nos ha enviado la siguiente lista de precios, dependiendo del número de camisetas que se le compren:

Nº de Camisetas	Coste total
100	500 €
250	1.200 €
500	2.000 €
750	2.800 €
1.000	3.500 €
1.500	4.900 €
2.000	6.000 €

1. Primeros pasos: un sondeo

Para saber el número de camisetas que podréis vender a un determinado precio decidís hacer un sondeo entre los compañeros del instituto. (Supongamos que los únicos posibles compradores de camisetas son los alumnos del instituto, aunque cada uno podría comprar más de una para otros amigos, hermanos, etc.) Para modelizar cualquier problema real hay que realizar hipótesis que simplifiquen y hagan posible su tratamiento matemático: el que las hipótesis sean adecuadas es el primer paso y un paso esencial para que los resultados del modelo matemático se ajusten a la realidad.

En el sondeo realizado a 30 compañeros has obtenido los siguientes resultados:

Precio de cada camiseta	Nº de camisetas que se venderían
4 €	74
6 €	52
8 €	34
10 €	21
12 €	10

Teniendo en cuenta que en el Instituto hay 600 alumnos y aplicando la proporción correspondiente se puede obtener el número total de camisetas que se prevén vender en función del precio de venta:

Precio de cada	Nº de camisetas que se venderían en el Centro
4 €	1.480
6 €	1.040
8 €	680
10 €	420
12 €	200

A partir de estos datos, utilizando el programa MATHEMATICA, podemos obtener una representación gráfica de estos puntos y una función que se ajuste a estos datos.

encuesta={74,52,34,21,10}

nuevalista=encuesta/30*600

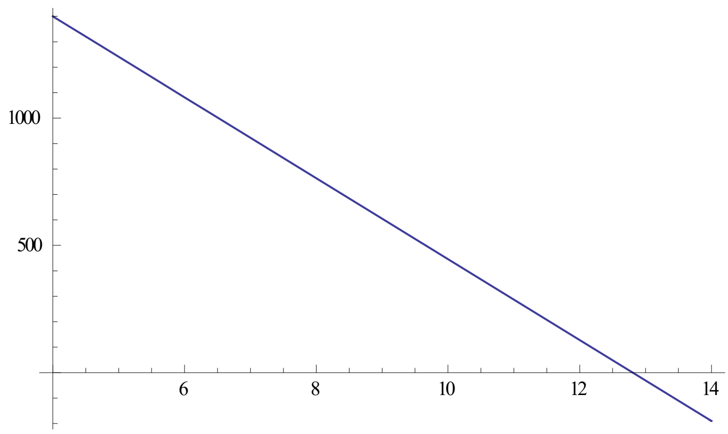
{1480,1040,680,420,200}

preclista = Table[{Precio[[i]], nuevalista[[i]]}, {i, Length[Precio]}]

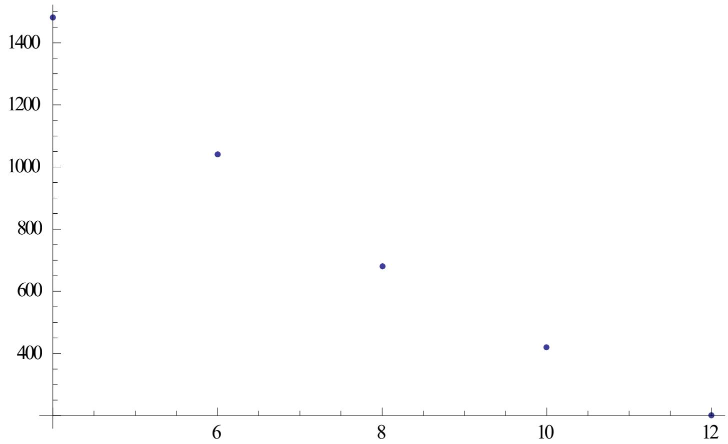
{{4,1480}, {6,1040}, {8,680}, {10,420}, {12,200}}

Mediante la instrucción Fit[preclista, {1, x}, x] se obtiene la recta de mejor ajuste a los puntos de la lista L: y = 2036 – 159 x

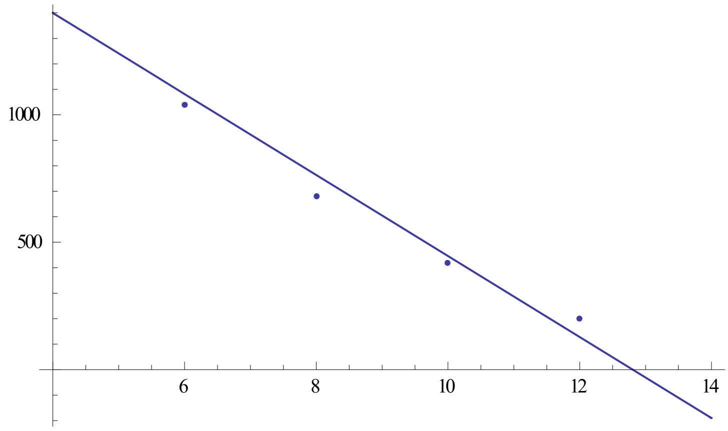
rectareg = Plot[%, {x, 4,14}]



Puntos = ListPlot[preclista]



Show[rectareg, Puntos]



El problema de ajustar una función a una serie de datos ya no es un problema técnico: mediante el ordenador podemos ajustar, de la misma forma que hemos ajustado una función lineal, cualquier otro tipo de función: cuadrática, polinómica de grado superior, exponencial, logarítmica, o trigonométrica. Las claves sobre las que hay que reflexionar pasan de ser los cálculos y algoritmos a una comprensión más profunda del problema: ¿por qué hemos elegido una función lineal como función de ajuste?, ¿cuáles son las características básicas de la situación que hace que la función elegida sea adecuada o no?

Se podrá hacer ver a los alumnos que la ley de la oferta y demanda se modeliza mediante una función lineal y deberían ser capaces de interpretar el significado de la ecuación obtenida: $y = 2036 - 159x$ y ver si es razonable o no.

La ecuación nos dice que por cada euro que aumentemos el precio de las camisetas venderemos 159 camisetas menos, lo que puede ser razonable, y que al precio de 0 euros venderíamos 2036.

2. Cálculo de los Ingresos en función del Precio

Una vez calculada la función $NumVent(x) = 2036 - 159x$ que nos da el número de camise- tas que esperamos vender en función del precio, el obtener los ingresos previstos es inmediato: bastará multiplicar el precio por el nº de camisetas vendidas:

$$Ingr(x) = x\,(2036-159x) = -159x^2 + 2036x$$

Otra forma de calcular la relación entre precio e ingresos sería a partir de la tabla inicial, añadiendo una tercera columna con los ingresos previstos:

Precio de cada camiseta	Nº de camisetas que se venderían en el Centro	Ingresos previstos: Precio x Nº cam.
4 €	1.480	5.920 €
6 €	1.040	6.240 €
8 €	680	5.440 €
10 €	420	4.200 €
12 €	200	2.400 €

Se trataría de ajustar una nueva función a los valores de la primera y tercera columnas, que me diese los ingresos en función del precio. De manera análoga a lo realizado en el caso anterior, utilizando el programa MATHEMATICA se puede obtener la función de ajuste. El problema será determinar qué tipo de función hay que ajustar en este caso. Representando gráficamente los puntos se ve que una función lineal no es adecuada, y mediante un pequeño análisis como el realizado para obtener la ecuación anterior se comprende que una función de segundo grado puede ser adecuada.

Se pueden observar las instrucciones utilizadas en Mathematica para construir la columna de ingresos sin necesidad de teclearla directamente. La línea

$\text{precingresos} = \text{Table}[\{\text{Precio}[[i]], \text{Precio}[[i]] * \text{nuevalista}[[i]]\}, \{i, \text{Length}[\text{Precio}]\}]$

$\{\{4,5920\},\{6,6240\},\{8,5440\},\{10,4200\},\{12,2400\}\}$

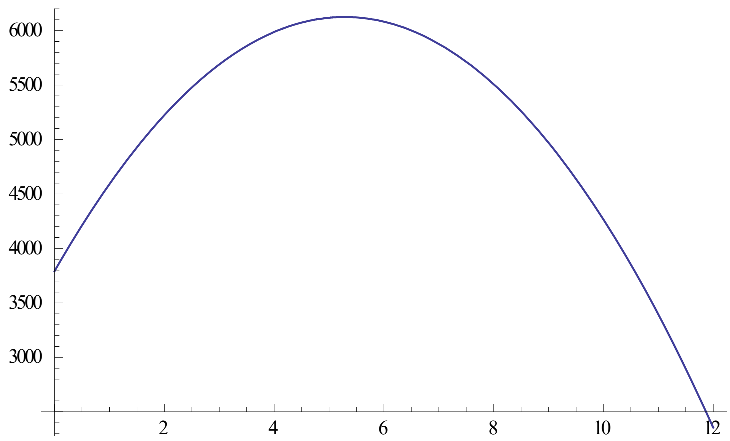
Ajustemos por tanto una función de segundo grado a estos puntos:

$\text{Fit}[\text{precingresos}, \{1, x, x\hat{}2\}, x]$

$$3792.0000000000728 + 883.1428571428544x - 83.5714285714291x^2$$

La función obtenida (con una precisión de 2 decimales) sería:

$$\text{Ingr2}(x) := -83{,}57\ x^2 + 883{,}14\ x + 3792$$



d1=Plot[3792.0000000000728" "+883.1428571428544x-83.5714285714291x^2,{x,0,12}]

MaxValue[3792.0000000000728]+ 883.1428571428544` x -

83.5714285714291` x^2, x]

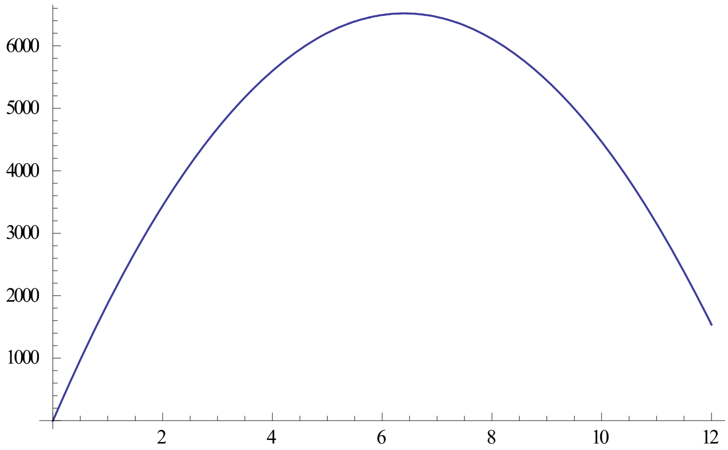
6125.16

Como se ve es una función bastante diferente de la que habíamos calculado inicialmente

$$\text{Ingr}(x) = -159x^2 + 2036x$$

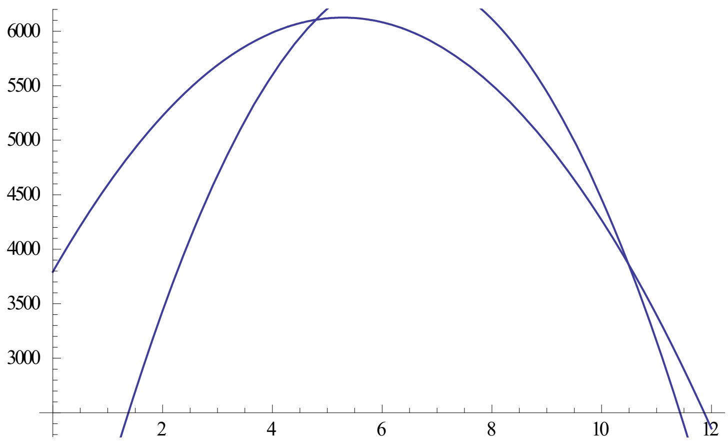
Tenemos dos funciones distintas para modelizar la misma situación. Dan valores cercanos pero no iguales ¿Hay alguna razón para preferir una a la otra?

d2 = Plot[2036 x - 159 x^2, {x, 0, 12}]



MaxValue[2036 x - 159 x^2, x] // N
6517.76

Representando en la misma gráfica las dos funciones:
Show[d1, d2]



¿Cuál es el significado del punto de corte con el eje Y? Obviamente representa los ingresos previstos cuando el precio de venta de las camisetas es de 0 euros. Teniendo en cuenta este dato parece más realista la función Ingr(x) –que pasa por (0,0)– que la función Ingr2(x) que nos daría unos ingresos de 3.792 euros para el precio de 0 euros.

Tomaremos por tanto a partir de ahora como función ingresos la dada por :

$$\mathrm{Ingr}(x) = -159x^2 + 2036x$$

3. ¿Para qué precio se obtendrán los Ingresos Máximos?

Dependiendo de los conocimientos de los alumnos el problema se puede abordar utilizando la opción Tabla del programa Mathematica que nos permite calcular valores de la función o bien derivando, si conocen el tema de máximos y mínimos.

```
Table[{x, 2036 x - 159 x^2}, {x, 1, 10, 0.1}]
{{1., 1877.}, {1.1, 2047.21}, {1.2, 2214.24}, {1.3, 2378.09}, {1.4,
 2538.76}, {1.5, 2696.25}, {1.6, 2850.56}, {1.7, 3001.69}, {1.8,
 3149.64}, {1.9, 3294.41}, {2., 3436.}, {2.1, 3574.41}, {2.2,
 3709.64}, {2.3, 3841.69}, {2.4, 3970.56}, {2.5, 4096.25}, {2.6,
 4218.76}, {2.7, 4338.09}, {2.8, 4454.24}, {2.9, 4567.21}, {3.,
 4677.}, {3.1, 4783.61}, {3.2, 4887.04}, {3.3, 4987.29}, {3.4,
 5084.36}, {3.5, 5178.25}, {3.6, 5268.96}, {3.7, 5356.49}, {3.8,
 5440.84}, {3.9, 5522.01}, {4., 5600.}, {4.1, 5674.81}, {4.2,
 5746.44}, {4.3, 5814.89}, {4.4, 5880.16}, {4.5, 5942.25}, {4.6,
 6001.16}, {4.7, 6056.89}, {4.8, 6109.44}, {4.9, 6158.81}, {5.,
 6205.}, {5.1, 6248.01}, {5.2, 6287.84}, {5.3, 6324.49}, {5.4,
 6357.96}, {5.5, 6388.25}, {5.6, 6415.36}, {5.7, 6439.29}, {5.8,
 6460.04}, {5.9, 6477.61}, {6., 6492.}, {6.1, 6503.21}, {6.2,
 6511.24}, {6.3, 6516.09}, {6.4, 6517.76}, {6.5, 6516.25}, {6.6,
 6511.56}, {6.7, 6503.69}, {6.8, 6492.64}, {6.9, 6478.41}, {7.,
 6461.}, {7.1, 6440.41}, {7.2, 6416.64}, {7.3, 6389.69}, {7.4,
 6359.56}, {7.5, 6326.25}, {7.6, 6289.76}, {7.7, 6250.09}, {7.8,
 6207.24}, {7.9, 6161.21}, {8., 6112.}, {8.1, 6059.61}, {8.2,
 6004.04}, {8.3, 5945.29}, {8.4, 5883.36}, {8.5, 5818.25}, {8.6,
 5749.96}, {8.7, 5678.49}, {8.8, 5603.84}, {8.9, 5526.01}, {9.,
 5445.}, {9.1, 5360.81}, {9.2, 5273.44}, {9.3, 5182.89}, {9.4,
 5089.16}, {9.5, 4992.25}, {9.6, 4892.16}, {9.7, 4788.89}, {9.8,
 4682.44}, {9.9, 4572.81}, {10., 4460.}}
```

Como se puede ver en la figura adjunta al valor de x = 6,3 le corresponderían unos ingresos de 6.516,09 euros.

Podr5iamos calcular una nueva tabla entre 6.3 y 6.4. El estudio de esta tabla nos indicaría que el máximo se alcanzaría entre 6,33 y 6,44.

Mediante el cálculo de valores entre 6,33 y 6,44 se puede aproximar todavía más el resultado.

Como se puede ver la Tabla nos sitúa el máximo para un precio x = 6’4 euros, valor para el cual se obtendrían unos ingresos de 6.517,76 euros.

Caso de que el alumno conociese las técnicas de derivación, el problema no tiene mayor dificultad:

Se puede obtener la derivada de la función y resolver la ecuación igualada a 0 que nos daría el valor para el cual se obtiene el máximo:

x = 6,40

4. Obtención de los Beneficios Máximos

(Teniendo en cuenta los precios de coste de las camisetas)

En el apartado anterior hemos obtenido los ingresos máximos según el precio de venta, pero lo que de verdad nos interesa es el beneficio máximo que podemos obtener después de descontar a los ingresos obtenidos los gastos realizados al comprar las camisetas.

Retomando los precios de coste de las camisetas:

Nº de Camisetas	Coste total
100	500 €
250	1.200 €
500	2.000 €
750	2.800 €
1.000	3.500 €
1.500	4.900 €
2000	6.000 €

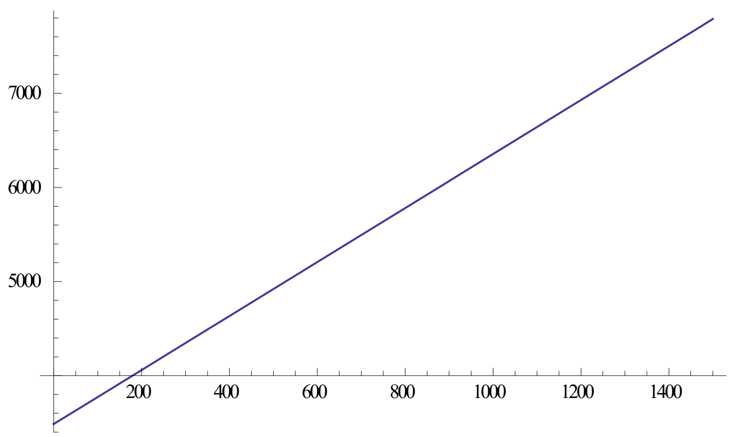
Trataremos de encontrar una función que se ajuste a estos valores:

```
camisetas = {100, 250, 500, 750, 1000, 1500,2000}

coste = {500, 1200, 2000, 2800, 3500, 4900,6000}

cs = Table[{camisetas[[i]], coste[[i]]}, {i, Length[camisetas]}]

{100, 500}, {250, 1200}, {500, 2000}, {750, 2800}, {1000,
  3500}, {1500, 4900}, {2000, 6000}}Fit[cs, {1, x}, x]
```



486.015+2.86851 x

Haciendo como en el caso inicial el ajuste lineal de la tabla **cs** obtenemos la recta: Coste(x) = 2,87x 486,01 que nos da el coste en función del número de camisetas compradas y que nos sugiere un coste inicial de 486,01 euros y un incremento en el coste de 2,87 euros por cada camiseta producida.

Recordando que el número de camisetas x que se prevé vender era función del precio p de venta según la función: x = 2.036 – 159 p, se puede obtener el coste de las camisetas en función del precio de venta: (Los alumnos verán así una aplicación de la composición de funciones).

Operando con el programa Mathematica:

Coste[p_]:= 2,87 p +486,01

vender[p_]: = 2036 – 159 p

cosf[p_]=Coste[vender[p]]

486.012.87 (2036 - 159 p)

Expand[%]

6329.33-456.33 p

Que nos da para la función cosf (p) (Coste de las camisetas en función del precio p de venta) el valor:

cosf(p) = 6329.33-456.33 p

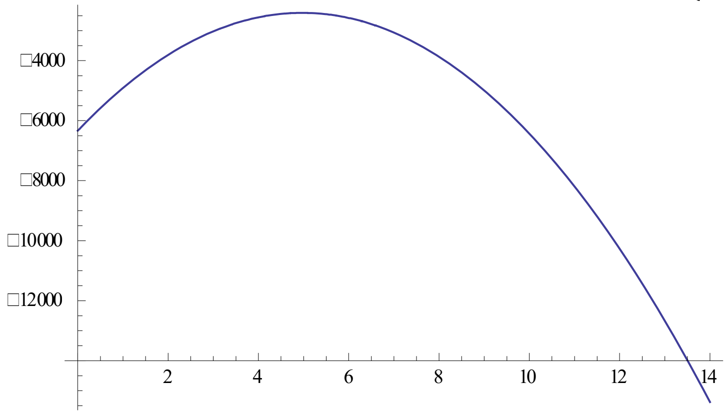
Esta función nos indica que por cada euro que se aumente el precio, el costo total disminuirá en 456,33 euros.

Por último para obtener el Beneficio en función del precio de venta bastará definir la función:

Beneficio[p_] := Ingr[p] – cosf[p]

Beneficio[p_]:= `-6329.33` + 2492.33` p - 159 p^2`

```
Plot[-6329.33` + 2492.33` p - 159 p^2, {p, 0, 14}]
```



Después de los cálculo se tiene:

$$\text{Beneficio}(p) = -159\ p^2 + 2.492{,}33\ p - 6.329{,}33$$

Cuyo máximo se puede obtener bien construyendo una tabla de valores o bien mediante el cálculo de la derivada. Como se ve en la figura anterior el máximo

estará próximo a 7,8, y construyendo la tabla para valores cercanos a éste.
max=2492.3/150/2=7.83752 (derivando o por el máximo de una parábola)

que nos da el máximo en p = 7,84 euros y unos beneficios máximos de 3437.51

euros. Hasta aquí el tratamiento teórico del problema: Recopilando lo realizado,

tenemos:

	Función	Valor en x = 7,85
Precio fijado	X	7,85 €
Nº camisetas que se venderían	Numvent(x)	787,85 camisetas
Ingresos que se obtendrían	Ingr(x)	6.184,62 €
Coste de las camisetas	cosf(x)	2.745,96 €
Beneficios	Beneficio(x)	3437.51€

5. Vuelta a la situación real

Una vez obtenidos los resultados que nuestro modelo matemático de la situación nos ha dado debemos volver a contrastarlos con la situación real.

Supongamos ahora que la empresa a la que le compramos las camisetas sólo vende las cantidades exactas que nos ofertó en su lista de precios, y por tanto no podemos comprar 787,85 camisetas. Debemos comprar 750 o 1000.

Si compramos 750 camisetas el gasto era de 2.800 euros y mientras que si compramos 1.000 camisetas el gasto era de 3.500 euros.

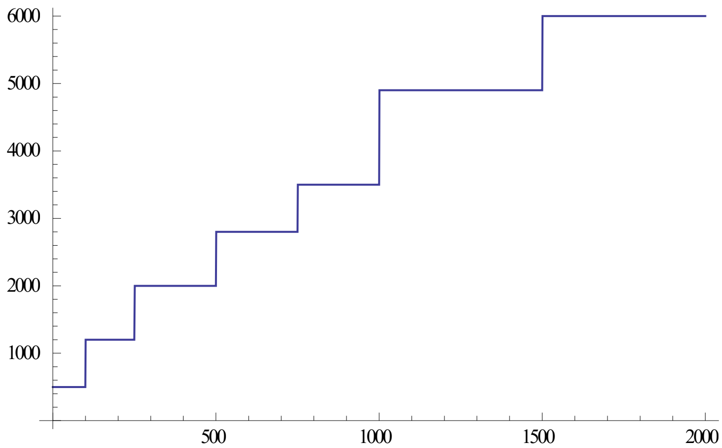
A la vista del resultado obtenido parece más lógico inclinarse por comprar 750 camisetas y tal vez aumentar un poco el precio pero ¿podemos precisar más?

Definimos ahora una nueva función Costereal(n), según la tabla de valores de la página 1, que me daba el coste de las camisetas en función del número de camisetas compradas.

Nº de Camisetas	Coste total	Costereal(n)	
100	500	500	$1 \leq n \leq 100$
250	1.200	1.200	$101 \leq n \leq 250$
500	2.000	2.000	$251 \leq n \leq 500$
750	2.800	Costereal(n): 2.800	$501 \leq n \leq 750$
1.000	3.500	3.500	$751 \leq n \leq 1.000$
1.500	4.900	4.900	$1.001 \leq n \leq 1.500$

Esta función es una función a trozos que se puede definir en Mathematica mediante la función

```
f[x_] := Which[x <= 100, 500, 100 < x <= 250, 1200, 251 < x <= 500,
 2000, 501 < x <= 750, 2800, 751 < x <= 1000, 3500, 1001 < x <= 1500,
  4900, 1501 < x <= 2000, 6000]
```



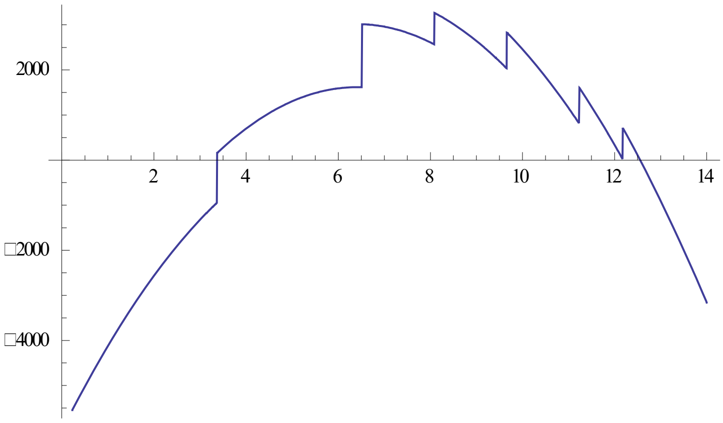
Siguiendo los mismos pasos que en el apartado 4, podemos obtener:

NumVent[x_] := 2036 – 159x

Ingr[x_]:= $-159x^2 + 2036x$

csf1[p_]:= f[NumVent[p]] que da el coste en función del precio establecido, y por último:

B1[p_]:= Ingr[p] – Csf1[p] Nos daría los beneficios previstos.



B1[p_] := Ingr[p] - csf1[p] (Beneficioreal1)
Plot[B1[x], {x, 0, 14}]

Hay que hacer notar que esta gráfica sólo tiene sentido para valores de p entre 0,23 y 12,79 que son los límites para los que Numvent(p) está en el dominio de Costereal.

Como se ve en la gráfica esta función alcanza el máximo aproximadamente en 8,10. (Se nos ofrece una buena oportunidad para hablar de máximos y mínimos cuando el dominio es cerrado y acotado, donde hay que tener siempre bien presentes los extremos).

Obteniendo algunos valores próximos a éste :

B1[8.10] = 3.259,61

B1[8.09] = 3264.99

B1[8.08] = 2570.34, valor para el cual se observa en la gráfica, que ya hemos pasado a la rama anterior.

Por tanto el máximo para los beneficios se logrará en torno a 8.09 euros.

Y el resumen de la información obtenida :

	Función	Valor en x = 8,09
Precio fijado	x	8,09 €
Nº camisetas que se venderían	Numvent(x)	749,69 camisetas
Ingresos que se obtendrían	Ingr(x)	6.064,99 €
Coste de las camisetas	Coste_Prec(x)	2.800 €
Beneficios	Beneficio(x)	3.264,99 €

Es decir debemos comprar 750 camisetas y venderlas a un precio de 8,10 euros.

- **- Actividades de evaluación.**

1. Una compañía desea hacer predicciones del valor anual de sus ventas totales en cierto país a partir de la relación de éstas y la renta nacional. Para investigar la relación cuenta con los siguientes datos:

X	189	190	208	227	239	252	257	274	293	308
Y	402	404	412	425	429	436	440	447	458	469

X representa la renta nacional en millones de euros e Y representa las ventas de la compañía en miles de euros en el periodo que va desde 1990 hasta 2000 (ambos inclusive). Calcular:

1 La **recta de regresión** de Y sobre X.

2 El **coeficiente de correlación lineal** e interpretarlo.

3 Si en 2001 la renta nacional del país fue de 325 millones de euros. ¿Cuál será la predicción para las ventas de la compañía en este año?

BIBLIOGRAFÍA

García A. y otros. "Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas". Editorial
SINTESIS.

"MATHEMATICS TEACHER"

Bagazgoitia, Alberto.ACTIVIDADES PARA EL AULA CON DERIVE DIRIGIDO A 4º DE ESO O 1º DE BACHILLERATO. SIGMA Nº 24