PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y POLINOMIOS DE BERNOULLI Y EULER

Manuel Díaz Regueiro, IES Xoán Montes de Lugo

RESUMEN

Se generalizan propiedades de los polinomios de Bernoulli y Euler a progresiones aritméticas. Se estudian los momentos centrales de las progresiones aritméticas en función de estos polinomios y se aplican a casos particulares de ajuste de mínimos cuadrados.

Momentos de una progresión aritmética.

Dados n números x_1, x_2, x_3,...., x_n, en progresión aritmética de diferencia d, es decir, $x_i = x_1+(i-1)d$, entonces la media de los números $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_n}{2}$ es la media de los extremos de la progresión.

Ahora ya que $x_i - \bar{x} = x_1 + (i-1)d - x_1 - \frac{(n-1)d}{2} = (i - (\frac{n+1}{2}))d$ la varianza $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (i - (\frac{n+1}{2}))^2 \frac{d^2}{n} = \sigma^2_{x_1,x_n} - (n-1)(n-2)\frac{d^2}{6}$ es igual a la varianza de los extremos menos $(n-1)(n-2)\frac{d^2}{6}$.

También es igual a $\sigma^2 = \frac{(n^2-1)d^2}{12}$ como se comprueba al desarrollar σ^2, teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ y que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Para n grande $\sigma = \frac{nd}{2\sqrt{3}}$.

De aquí, $a_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} = \bar{x}^2 + \frac{(n^2-1)d^2}{12}$

$m_3 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^3}{n} = 0$. m_3, al igual que todos los momentos centrales de orden impar son 0, porque por cada $x_i - \bar{x}$ positivo hay otro negativo de igual valor absoluto.

$$a_3 = 3a_2\bar{x} - 2\bar{x}^3 = \bar{x}^3 + \frac{\bar{x}(n^2-1)d^2}{4}$$

$$m_4 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^4}{n} = \sum_{i=1}^{n} (i - (\frac{n+1}{2}))^4 \frac{d^4}{n} = \frac{(3n^4 - 10n^2 + 7)d^4}{240}$$ y

$$a_4 = \bar{x}^4 + \frac{\bar{x}^2(n^2-1)d^2}{2} + \frac{(3n^4 - 10n^2 + 7)d^4}{240}$$

En general, $m_{2p+1} = 0$ y $m_{2p} = Q(n)d^{2p}$ siendo Q(n) un polinomio de grado 2p.

Para obtener las fórmulas generales utilizaré:

Polinomios de Bernuilli

Las propiedades de los polinomios de Bernuilli que se van a utilizar son:

[1] $\sum_{i=1}^{n} i^k = \dfrac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}$

[2] $\int_0^{n+1} B_{k+1}(x)dx = \dfrac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1}$

[3] $B_k(x+h) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i(x) h^{k-i}$

[4] $B_{k+1}(-h) = (-1)^{k+1} B_{k+1}(h) + (-1)^{k+1}(k+1)h^k$

Momentos centrales de una progresión aritmética

Calculamos

$m_k = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(x_i - \overline{x})^k}{n} = \sum_{i=1}^{n} (i - (\dfrac{n+1}{2}))^k \dfrac{d^k}{n}$ para lo que, previamente, hallamos:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-h)^k = \sum_{i=1}^{n} \left(i^k - \binom{k}{1} i^{k-1} h + \binom{k}{2} i^{k-2} h^2 - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} i h^{k-1} + (-1)^k h^k \right) =$$

$$\frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}}{k+1} - \binom{k}{1} \frac{B_k(n+1) - B_k}{k} h + \ldots\ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \frac{B_2(n+1) - B_2}{2} h^{k-1} + n(-1)^k h^k$$

utilizando [1]. El último sumando puede expresarse

$(n+1)(-1)^k h^k - (-1)^k h^k = (-1)^k (B_1(n+1) - B_1) h^k - (-1)^k h^k$. Es decir, por [2]

$$\sum_{i=1}^{n} (i-h)^k = \int_0^{n+1} \left(B_k(x) - \binom{k}{1} B_{k-1}(x) h + \ldots\ldots + (-1)^k B_0(x) h^k \right) dx - (-1)^k h^k = \text{ por [3]}$$

$$\int_0^{n+1} B_{k+1}(x-h)dx - (-1)^k h^k = \frac{B_{k+1}(n+1-h) - B_{k+1}(-h)}{k+1} + (-1)^{k+1} h^k = \text{ por [4]}$$

$$\frac{B_{k+1}(n+1-h) + (-1)^{k+2} B_{k+1}(h) + (-1)^{k+2}(k+1)h^k}{k+1} + (-1)^{k+1} h^k =$$

$$\frac{B_{k+1}(n+1-h) + (-1)^{k+2} B_{k+1}(h)}{k+1}$$

en el caso de m_k, $h = \dfrac{n+1}{2}$ y $m_k = \dfrac{B_{k+1}(\frac{n+1}{2}) + (-1)^{k+2} B_{k+1}(\frac{n+1}{2})}{k+1} \dfrac{d^k}{n}$

es decir, $m_k = 0$ (si k es impar) y $m_k = \dfrac{2B_{k+1}(\frac{n+1}{2})d^k}{n(k+1)}$ si k es par.

Momentos respecto al origen y suma de potencias

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{((x_i - \overline{x}) + \overline{x})^k}{n} = \overline{x}^k + \binom{k}{1} m_1 \overline{x}^{k-1} + \ldots + m_k = \overline{x}^k + \binom{k}{2} m_2 \overline{x}^{k-2} + \ldots + m_k =$$

$\overline{x}^k + \binom{k}{2} \dfrac{2B_3(\frac{n+1}{2})d^2}{3n} \overline{x}^{k-2} + \ldots + m_k$, donde $m_k = 0$ (si k es impar) y $m_k = \dfrac{2B_{k+1}(\frac{n+1}{2})d^k}{n(k+1)}$ si k es par.

Y $s_k = na_k$ siendo s_k la suma de potencias k de los términos de la progresión.

Es posible generalizar la fórmula [1] para s_k.

$$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k = \sum_{i=1}^{n} (x_1 + (i-1)d)^k = \sum_{i=1}^{n} (x_1^k + \binom{k}{1} x_1^{k-1}(i-1)d + \ldots + (i-1)^k d^k) =$$

$$nx_1^k + \binom{k}{1} x_1^{k-1} d \frac{(B_2(n) - B_2)}{2} + \ldots + d^k \frac{(B_{k+1}(n) - B_{k+1})}{k+1}.$$

Como n= $B_1(n) - B_1$

$$s_k = \int_0^n (B_0 x_1^k + B_1(x) x_1^{k-1} \binom{k}{1} d + \ldots + B_k(x) d^k) dx =$$

$$d^k \int_0^n (B_0 \left(\frac{x_1}{d}\right)^k + B_1(x) \binom{k}{1} \left(\frac{x_1}{d}\right)^{k-1} + \ldots + B_k(x)) dx =$$

$$d^k \int_0^n B_k\left(x + \frac{x_1}{d}\right) dx = \left(\frac{B_{k+1}(n + \frac{x_1}{d}) - B_{k+1}(\frac{x_1}{d})}{k+1}\right) d^k = \left(\frac{B_{k+1}(\frac{x_{n+1}}{d}) - B_{k+1}(\frac{x_1}{d})}{k+1}\right) d^k$$

Otras fórmulas

Los polinomios de Euler tienen fórmulas en cierta manera semejantes a los de Bernoulli. Así, puesto que:

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} i^k = \frac{E_k(n+1) + (-1)^n E_k(0)}{2}$ la misma suma para una progresión aritmética general es:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (x_1 + (i-1)d)^k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (x_1^k + \binom{k}{1} (i-1) d^{k-1} + \ldots + (i-1)^k d^k) =$$

$$\frac{x_1^k + (-1)^{n-1} x_1^k}{2} + \binom{k}{1} x_1^k d \left(\frac{E_1(n) + (-1)^{n-1} E_1(0)}{2}\right) + \ldots + d^k \left(\frac{E_k(n) + (-1)^{n-1} E_k(0)}{2}\right) =$$

$$\frac{d^k}{2}\left(\left(E_0\left(\frac{x_1}{d}\right)^k + \ldots + E_k(n)\right) + (-1)^{n-1}\left(E_0\left(\frac{x_1}{d}\right)^k + \ldots + E_k(0)\right)\right) =$$

$$d^k \frac{\left(E_k\left(n + \frac{x_1}{d}\right) + (-1)^{n-1} E_k\left(\frac{x_1}{d}\right)\right)}{2} = d^k \frac{\left(E_k\left(\frac{x_{n+1}}{d}\right) + (-1)^{n-1} E_k\left(\frac{x_1}{d}\right)\right)}{2}$$

En el caso particular $x_1 = 1-h$, d=1,

$$\sum_{i=1}^{n}(i-h)^k = \frac{E_k(n+1-h)+(-1)^{n-1}E_k(1-h)}{2} = \frac{E_k(n+1-h)+(-1)^{n+k-1}E_k(h)}{2}$$

Ahora, para

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\left(x_i-\bar{x}\right)^k = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\left(i-\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^k d^k = \frac{E_k\left(\frac{n+1}{2}\right)+(-1)^{n+k-1}E_k\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} =$$

$E_k\left(\frac{n+1}{2}\right)d^k$ si n+k es impar y 0 si n+k es par.

Aplicación al ajuste mínimo cuadrático

En numerosos casos de ajuste mínimo cuadrático de un polinomio será posible elegir los valores de x de tal manera que estén en progresión aritmética.

Si el polinomio es de grado m, al calcular los coeficientes que hacen mínimo $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - P(x_i)\right)^2$ se obtienen m+1 ecuaciones lineales con m+1 incógnitas cuyos coeficientes son las sumas s_k, expresable en función de x_1, n y d.

Si el polinomio a calcular se escribe y=$a_0 + a_1(x-\bar{x}) + ... + a_m(x-\bar{x})^m$, los coeficientes del sistema de ecuaciones resultante serán los momentos m_k, por lo que la mitad de los coeficientes serán cero y los restantes formulados en función de n y d.

Ejemplo 1. Ajuste de una recta.

Derivando Q=$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a+b(x_i-\bar{x}))\right)^2$ respecto a *a* y *b* e igualando a cero, resulta,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) = na$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i = a\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}) + b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{b2}{3}B_3\left(\frac{n+1}{2}\right)d^2$$

La recta es $y = \bar{y} + \frac{12\bar{y}_1(x-\bar{x})}{(n^2-1)d^2}$, simbolizando por $\bar{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^k y_i}{n}$

Ejemplo2. Ajuste de una parábola, y=$a+b(x-\bar{x})+c(x-\bar{x})^2$

El sistema de ecuaciones es:

$\bar{y} = a + cm_2$

$\bar{y}_1 = bm_2$

$\bar{y}_2 = am_2 + cm_4$, de donde, $a = \frac{m_4\bar{y}-m_2\bar{y}_2}{m_4-m_2^2}$, $b = \frac{\bar{y}_1}{m_2}$, $c = \frac{y_2 - m_2\bar{y}}{m_4-m_2^2}$, y, como sabemos,

$m_2 = \frac{(n^2-1)d^2}{12}$ y $m_4 = \frac{(3n^4-10n^2+7)d^4}{240}$

Otras propiedades

Sea p un número real. Entonces $\dfrac{te^{xt}}{e^{pt}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$ donde $A_n(x)=p^{n-1}B_n\left(\dfrac{x}{p}\right)$

y $B_n(x)$ son los polinomios de Bernoulli.

Si $\dfrac{pte^{ypt}}{e^{pt}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(y)\dfrac{p^n t^n}{n!}$ entonces $\dfrac{te^{ypt}}{e^{pt}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(y)\dfrac{p^{n-1}t^n}{n!}$ y haciendo y=x/p obtenemos el resultado.

Así 1) $A_n(x+p)=A_n(x)+nx^{n-1}$

$$A_n(x+p)=p^{n-1}B_n\left(\frac{x+p}{p}\right)=p^{n-1}B_n\left(\frac{x}{p}+1\right)=p^{n-1}\left(B_n\left(\frac{x}{p}\right)+n\left(\frac{x}{p}\right)^{n-1}\right)$$

2) $A_n^{'}(x)=nA_{n-1}(x)$

$$A_n^{'}(x)=p^{n-1}B_n^{'}\left(\frac{x}{p}\right)\frac{1}{p}=p^{n-2}B_{n-1}\left(\frac{x}{p}\right)n=nA_{n-1}(x)$$

3) $A_n(p-x)=(-1)^n A_n(x)$

$$A_n(p-x)=p^{n-1}B_n\left(\frac{p-x}{p}\right)=p^{n-1}B_n\left(1-\frac{x}{p}\right)=p^{n-1}B_n\left(\frac{x}{p}\right)(-1)^n=(-1)^n A_n(x)$$

4) $A_n(x+ph)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)(ph)^{n-k}$

5) Sea x_r una progresión aritmética de diferencia p,

$$\sum_{s=1}^{r}(x_r)^{n-1}=\frac{A_n(x_{r+1})-A_n(x_1)}{n}$$

Tenemos

$A_n(x_{r+1})=A_n(x_r+p)=A_n(x_r)+nx_r^{n-1}$

$A_n(x_r)=A_n(x_{r-1}+p)=A_n(x_{r-1})+nx_{r-1}^{n-1}$

....

$A_n(x_2)=A_n(x_1+p)=A_n(x_1)+nx_1^{n-1}$

Sumando todas las igualdades,

$$A_n(x_{r+1})=A_n(x_1)+n\sum_{s=1}^{r}x_s^{n-1}$$

6) $\int_a^x A_n(t)dt=\dfrac{A_{n+1}(x)-A_{n+1}(a)}{n+1}$

7) $A_n(px)=p^{n-1}B_n(x)$, etc.

También $\dfrac{2e^{xt}}{e^{pt}+1}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$ donde $D_n(x)=p^{n-1}E_n\left(\dfrac{x}{p}\right)$ y los $E_n(x)$

son los polinomios de Euler.

Así 1) $D_n(x+p)+D_n(x)=2x^n$

2) $D_n^{'}(x)=nD_{n-1}(x)$

3) $D_n(p-x)=(-1)^n D_n(x)$

4) $D_n\left(x+ph\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k\left(x\right)\left(ph\right)^{n-k}$

5)Sea x_r una progresión aritmética de diferencia p,

$$\sum_{s=1}^{r}\left(x_r\right)^{n-1}(-1)^{n-s} = \frac{D_n\left(x_{r+1}\right)-D_n\left(x_1\right)(-1)^r}{2}$$

6) $\int_a^x D_n(t)dt = \dfrac{D_{n+1}(x)-D_{n+1}(a)}{n+1}$

7) $D_n(px) = p^{n-1}E_n(x)$,etc.

Momentos centrales de una progresión aritmética y ajuste.

Si queremos hacer un ajuste parabólico por el método de mínimos cuadrados y los valores x_1, x_2, x_3,...., x_n, están en progresión aritmética, entonces los parámetros de

$$y=a_0+a_1(x-\overline{x})+a_2(x-\overline{x})^2+......+a_n(x-\overline{x})^n$$

pueden calcularse en función de los momentos centrales(antes calculados) y de las medias ponderadas $\overline{y}_k = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^k y_i}{n}$.

BIBLIOGRAFÍA

Abramowitz and Stegun. Handbook of mathematical functions. *Dover*.
Gradshteyn-Ryzhik. Table of integrals, series and products. *Academic Press.*
G. Calot. Curso de estadística descriptiva. *Paraninfo*.