DOS MÁS DOS SON CINCO.

Manuel Díaz Regueiro.

¿Por qué, oh dioses, dos y dos han de ser cuatro? Alexander Pope.

Si a un matemático le dicen que dos más dos son diez, o once, inmediatamente dirá: si, en base 4 o 3. Pero no está tan claro que sepa responder al hecho de que dos más dos sean cinco. Y sin embargo, podría decir, a pesar del uso común de la frase con significado de absurdo, antinatural, o de falso, que si, es certo, y de infinitas maneras. De esto vamos a tratar en las líneas siguientes.

Como primera idea, y siguiendo a Hermann von Helmholtz en su "*Contar y medir*", es muy problemática la aplicación automática de las leyes aritméticas a los fenómenos físicos. Veamos algunos ejemplos: en Química, si uno toma dos volúmenes de hidrógeno y uno de oxígeno se obtienen dos volúmenes de vapor de agua. Un cuarto de alcohol y un cuarto de agua son 1,8 cuartos de mezcla. Tres cucharadas de agua y una cucharada de sal no son cuatro cucharadas. Una gota de agua unida a otra gota no dan lugar a dos gotas. Como señalaba H. Lebesgue, si ponemos un león y un conejo en una jaula no se puede esperar que más tarde haya dos animales en esa jaula.[2].

¿Sobre que convenio podemos afirmar que 2+2=5? Sobre el que estemos hablando del conjunto de números reales, con estructura de cuerpo, pero no naturalmente del canónico, sino de uno isomorfo a ese en el que los "nombres" están cambiados. Es decir, supongamos, una aplicación biyectiva f: R----->R', siendo R' exactamente el mismo conjunto que R, pero en el que vamos definir las dos operaciones que le dan estructura de cuerpo, la suma y la multiplicación, del modo siguiente:

$x\Delta y=f^{-1}(f(x)+f(y))$ y $x*y=f^{-1}(f(x).f(y))$.

Lo primero que se puede demostrar es que, dado que R es un cuerpo, también lo será R' Por ejemplo, la propiedad distributiva de la multiplicación respeto a la suma se demuestra:

$x*(y\Delta z)=f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(f(y)+f(z))))=f^{-1}(f(x).(f(y)+f(z)))= f^{-1}(f(x).f(y)+f(x).f(z))=f^{-1}(f(f^{-1}(f(x).f(y)))+f(f^{-1}(f(x).f(z))))= x*y\Delta x*z$.

Y el elemento neutro de la suma es $f^{-1}(0)$, ya que $x\Delta f^{-1}(0)=f^{-1}(f(x)+f(f^{-1}(0)))=f^{-1}(f(x)+0)=f^{-1}(f(x))=x$, lo mismo que $f^{-1}(1)$ es el elemento neutro de la multiplicación, pues $x*f^{-1}(1)= f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(1)))=f^{-1}(f(x).1)=f^{-1}(f(x))=x$.

El elemento simétrico de un elemento x respecto a la suma es $f^{-1}(-f(x))$, pues $x\Delta f^{-1}(-f(x))=f^{-1}(f(x)+f(f^{-1}(-f(x))))=f^{-1}(f(x)-f(x))=f^{-1}(0)$,

Dado f(x), su simétrico respecto a la multiplicación es $f^{-1}(1/f(x))$, puesto que $x*f^{-1}(1/f(x))=f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(1/f(x))))=f^{-1}(f(x).1/f(x)) =f^{-1}(1)$.

Las demás propiedades se demuestran de igual forma, y pueden hacerse como ejercicio, o leer [1], donde se da el teorema de definición por isomorfía que dice que: Si R es un sistema algebraico (grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc) y M un conjunto, entre los que se estableció una biyección I, es posible definir una estructura algebraica en M de modo que se obtenga un sistema algebraico isomorfo a R. (Y esta definición es la que ya vimos).

Volviendo ahora a la situación original, aplicaciones biyectivas del conjunto R en el cuerpo de los números reales, las más sencillas que se nos puede ocurrir son las f(x)=ax+b, de las que se deducen las operaciones

$x\Delta y=((ax+b)+(ay+b)-b)/a=x+y+b/a$ y x*y=((ax+b).(ay+b)-b)/a las cuales dotan a R de estructura de cuerpo y, si b/a=1, hacen que 2Δ2=5. Estas aplicaciones biyectivas así definidas permitirían definir isomorfismos entre dos conjuntos si en uno de ellos está definida alguna estructura. Por ejemplo, sea C=(-c ,c), siendo c la velocidad de la luz, y R cuerpo de los números reales, si definimos f(x)=arctanh(x/c), f:C--->R, se dota a C de estructura de grupo abeliano respecto a la suma si se define

uΔv=tanh(arctanh(u/c)+arctanh(v/c)).c=

$$\frac{(\tanh(\text{arctanh}(u/c))+\tanh(\text{arctanh}(v/c))).c}{1+\tanh(\text{arctanh}(u/c)).\tanh(\text{arctanh}(v/c))}=\frac{u+v}{1+\dfrac{u.v}{c^2}}$$

Otro ejemplo es el de la suma de dos resistencias en paralelo $R_1 \Delta R_2$, que viene dada por:

$$\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}$$

que es una ley xΔy=f^{-1}(f(x)+f(y)) en la que f(x)=1/x.

¿Que pasa si la función es potencia par o suma de potencias pares?. Tomemos por ejemplo

f(x)=x^2 , $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$, f:[0, ∞)-->R entonces xΔy=$\sqrt{x^2+y^2}$ y el elemento simétrico de x es f^{-1}(-f(x)) =xi, lo cual evidentemente no nos sirve para definir un grupo aditivo en los números reales positivos.

Definamos ahora G-Grupo, un conjunto G en el que están definidas dos operaciones internas (suma y resta) para las que se cumplen las condiciones siguientes $\forall$ a,b,c $\in$ G:

1) (a+b)+c=a+(b+c)

2)a+(b-c)=(a+b)-c (G-grupo derecha)

3)(a-b)+c=a-(b-c) (G-grupo centro)

4)(a-b)-c=a-(b+c) (G-grupo izquierda)

5) existe un elemento neutro *e* tal que a+e=e+a=a

6) e-e=e,

7)Dado a, existe a' tal que a-a'=e=a'-a

Prop. Un grupo es un G-grupo.

Es suficiente con definir la resta a-b=a+(-b), siendo (-b) el simétrico de b: la prueba es un ejercicio.

Prop. Un G-grupo es un grupo, ya que la operación (+) es interna, asociativa, tiene elemento neutro, y todo elemento a tiene simétrico que viene dado por a"= e-a'. Ahora a+a"=a+(e-a')=(a+e)-a'=a-a'=e e, a"+a=(e-a')+a=e-(a'-a)=e-e=e. Puestas así las cosas, parece que la definición de G-grupo no añade nada nuevo, pero supongamos que: (definición de G1-grupo) la propiedad 2) se cumpla siempre que b≠e; la 3) siempre que a≠e,b≠e y la 4) siempre que a≠e; entonces está claro que no podemos demostrar que un G1-grupo es un grupo, siguiendo los pasos de la demostración anterior, porque falla la demostración de existencia de elemento simétrico, pero además es posible hallar un contraejemplo:

Tomemos ahora como G=[1,∞) y como suma xΔy=x+y-1+2 , y como resta x-y=x+y-1-2

En primer lugar la suma es una operación interna, pues x>=1, y>=1, y la resta también, pues esto se deduce de que la media aritmética de x-1 y y-1 es mayor igual que su media geométrica:

$$\frac{(x-1+y-1)}{2}\geq\sqrt{(x-1)(y-1)}$$

es asociativa y conmutativa respecto a la suma, puesto que está definida según xΔy=f^{-1}(f(x)+f(y)), siendo f(x)= $\sqrt{x-1}$, $f^{-1}(x)=x^2+1$. Tiene elemento neutro, que es el 1, pero el elemento simétrico de x no se puede calcular como f^{-1}(-f(x)), que es x y xΔx=4x-3.

Por otro lado, la resta se definió x-y=f^{-1}(f(x)-f(y)), lo cual asegura que cumple 2) (con la excepción comprobable de b=e, es decir, b=1), 3) (en este caso no se cumple si b=e o a=e), 4) (tampoco se cumple cuando a=e), 6) se constata substituyendo, y 7) se cumple porque para x, x-x=1. Ejemplifiquemos en 2 los pasos a seguir para las demostraciones de 2),3),4). Queremos probar a+(b-c)=(a+b)-c:,

a+(b-c)=f^{-1}(f(a)+f(f^{-1}(f(b)-f(c))))=f^{-1}(f(a)+(f(b)-f(c)))=

f^{-1}((f(a)+f(b))-f(c))=f^{-1}(f(f^{-1}(f(a)+f(b))))-f(c))=(a+b)-c.

Ahora bien, si f(1)=0, como en este caso, y tal que f es cuadrática, es decir convierte f(f^{-1}(-f(c)))) en f(c) y no en -f(c), luego a+(1-c)=a+c y no (a+1)-c, que es a-c. Esta es la única excepción, que se podría abreviar diciendo que 1-c=c y no -c, es la causa de la excepción). Así vimos un ejemplo de G1-grupo que no es un grupo:

El conjunto G anterior.

Si definimos G1-grupo derecha (respectivamente izquierda, centro) como un conjunto en el que están definidas dos operaciones (suma y resta) internas tales que cumplen:

1) $(a+b)+c=a+(b+c)$,

2) $a+(b-c)=(a+b)-c$ (G1-grupo derecha),($b\neq e$, $a+b\neq e$),

o bien $(a-b)+c=a-(b-c)$ (G1-grupo centro) ($a,b\neq e$),

o ben $(a-b)-c=a-(b+c)$ (G1-grupo izquierda) ($a\neq e$, $a-b\neq e$),

3) existe un elemento neutro *e* tal que $a+e=e+a=a$,

4) $e-e=e$,

5) Dado *a*, existe *a*' (oponente) tal que $a-a'=e=a'-a$

Consecuencias:,

1) *e* es el único elemento de G que cumple $x+x=x$:

supongamos que existe *a* tal que $a+a=a$ y que $e\neq a$. Entonces $(a+a)-a'=a-a'=e$,

$a+(a-a')=a+e=a$, de donde $a=e$.

1-1) *e* es el único elemento que cumple $x-x=x$.

2) El oponente de a' es a.

3) Para todo elemento a, $a=2a-a'$; $a=a+e=a+(a-a')=2a-a'$, también $a=(a+a')-a$,

4) El oponente de a es único.

4-1) $c'=b' \Rightarrow c=b$,

4-2) $c'=e \Rightarrow c=e$. *e* es el oponente de *e*. Como es único,

5) *e* es único.

6-1) Simplificación por la derecha (supuesto G1-grupo derecha):,

$a+c=b+c \Rightarrow a=b$. Ya que $(a+c)-c'=(b+c)-c'=a+(c-c')=b+(c-c') \Rightarrow a+e=b+e \Rightarrow a=b$ (se $c\neq e$). Si $c=e$, de $a+e=b+e \Rightarrow a=b$.

6-2) Simplificación por la izquierda (supuesto G1-grupo centro):

$c-a=c-b \Rightarrow a=b$. Xa que $c'-(c-a)=c'-(c-b)=(c'-c)+a=(c'-c)+b \Rightarrow e+a=e+b \Rightarrow a=b$ (se $c\neq e$).

6-3) Simplificación por la derecha (supuesto G1-grupo centro):

$a-c=b-c \Rightarrow a=b$. Xa que $(a-c)+c'=a-(c-c')=a-e=a=(b-c)+c'=b-(c-c')=$

$b-e=b$ si $a\neq e$ y $b\neq e$.

6-4) Simplificación por la derecha (supuesto G1-grupo izquierda):

$a-c=b-c \Rightarrow a=b$. Ya que $(a-c)+c'=(b-c)+c'=a+(c'-c)=b+(c'-c) \Rightarrow a+e=b+e \Rightarrow a=b$ (si $c\neq e$). Si $c=e$, de $a-e=b-e \Rightarrow a=b$.

6-5) Simplificación por la izquierda (supuesto G1-grupo derecha):

$c-a=c-b \Rightarrow a=b$. Ya que $c'-(c-a)=c'-(c-b)=(c'-c)+a=(c'-c)+b \Rightarrow e+a=e+b \Rightarrow a=b$ (si $c'\neq e$).

Etc...

7-1) La ecuación $x+a=b$ tiene solución (G1 grupo derecha),

$(x+a)-a'=b-a'=x+(a-a')=x+e=x=b-a'$,

7-2) La ecuación $x-a=b$ tiene solución (G1 grupo centro),

$(x-a)+a'=b+a'=x-(a-a')=x-e=x$,

7-3) La ecuación $x-a=b$ tiene solución (G1 grupo centro),

$(x-a)-a'=b-a'=x-(a-a')=x-e=x=b-a'$,

7-4) La ecuación $a-x=b$ tiene solución (G1 grupo centro),

$a'-(a-x)=a'-b=(a'-a)+x=e+x=x$, etc.

8) El panorama de G1-grupos está lleno de pequeñas demostraciones, sencillas, pero delicadas. Además abren un montón de interrogantes. ¿Puede extenderse un semigrupo a un conjunto en el que se pueda resolver $x+a=b$, no sólo por simetrización, sino pasando a un G1-grupo?. ¿Es factible extender N con una resta de modo que forme un G1 grupo?. ¿Existen G1-grupos que no procedan de una ley cuadrática o función par?. ¿Existen G1-grupos derecha y no centro, por ejemplo?. Son preguntas para contestar en otro momento.

BIBLIOGRAFÍA,

[1].ABELLANAS, P. *ELEMENTOS DE MATEMÁTICA*.Teorema de definición por isomorfía. Pág 186-188. Madrid.

[2].KLINE, MORRIS. *LA PÉRDIDA DE LA CERTIDUMBRE*. Ed. Siglo XXI. Madrid. 1985.

Nota: G va por Galiza.