γ_1
GAMMA
setembro 2001

d o u s m á i s d o u s s o n c i n c o .

Manuel Díaz Regueiro. IES Xoán Montes.

¿Por qué, oh deuses, dúas e dúas han ser catro?. Alexander Pope.

Se a un matemático lle din que dúas máis dúas son dez, ou once, inmediatamente dirá: si, en base 4 ou 3. Pero non está tan claro que saiba responder ó feito de que dúas máis dúas sexan cinco. E sen embargo, podería dicir, a pesar do uso común da frase con significado de absurdo, antinatural, ou de falso, que si, é certo, e de infindas maneiras. Disto imos tratar nas liñas seguintes.

Como primeira idea, e seguindo a Hermann von Helmholtz no seu "*Contar e medir*", é moi problemática a aplicación automática das leis aritméticas ós fenómenos físicos. Vexamos algúns exemplos: en Química, se un toma dous volumes de hidróxeno e un de osíxeno obtéñense dous volumes de vapor de auga. Un cuarto de alcool e un cuarto de auga son 1,8 cuartos de mestura. Tres culleradas de auga e unha cullerada de sal non son catro culleradas. Unha pinga de auga unida a outra pinga non dan lugar a dúas pingas. Como sinalaba H. Lebesgue, se poñemos un león e un coello nunha gaiola non se pode esperar que máis tarde haxa dous animais na gaiola.[2].

¿Sobre que convenio podemos afirmar que 2+2=5?. Sobre o que esteamos falando do conxunto de números reais, con estructura de corpo, pero non naturalmente do canónico, sino dun isomorfo a ese no que os "nomes" están cambiados. É dicir, supoñamos, unha aplicación bixectiva f: R----->R', sendo R' exactamente o mesmo conxunto que R, pero no que imos definir as dúas operacións que lle dan estructura de corpo, a suma e a multiplicación do modo seguinte: $x\Delta y=f^{-1}(f(x)+f(y))$ e $x*y=f^{-1}(f(x).f(y))$.

O primeiro que se pode demostrar é que, dado que R é un corpo, tamén o será R' Por exemplo, a propiedade distributiva da multiplicación respecto á suma demóstrase:

$x*(y\Delta z)=f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(f(y)+f(z))))=f^{-1}(f(x).(f(y)+f(z)))= f^{-1}(f(x).f(y)+f(x).f(z))=f^{-1}(f(f^{-1}(f(x).f(y)))+f(f^{-1}(f(x).f(z))))= x*y\Delta x*z$.

E o elemento neutro da suma é $f^{-1}(0)$, xa que $x\Delta f^{-1}(0)=f^{-1}(f(x)+f(f^{-1}(0)))=f^{-1}(f(x)+0)=f^{-1}(f(x))=x$, o mesmo que $f^{-1}(1)$ é o elemento neutro da multiplicación, pois $x*f^{-1}(1)= f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(1)))=f^{-1}(f(x).1)=f^{-1}(f(x))=x$.

O elemento simétrico dun elemento x respecto á suma é $f^{-1}(-f(x))$, pois $x\Delta f^{-1}(-f(x))=f^{-1}(f(x)+f(f^{-1}(-f(x))))=f^{-1}(f(x)-f(x))=f^{-1}(0)$,

Dado f(x), o seu simétrico respecto á multiplicación é $f^{-1}(1/f(x))$, posto que $x*f^{-1}(1/f(x))=f^{-1}(f(x).f(f^{-1}(1/f(x))))=f^{-1}(f(x).1/f(x)) =f^{-1}(1)$.

As demais propiedades demóstranse de igual forma, e poden facerse como exercicio, ou ler [1], onde se dá o teorema de definición por isomorfía que di que : Se R é un sistema alxebraico (grupo, anel, corpo, espacio vectorial, etc) e M un conxunto, entre os que se estableceu unha bixección I, é posible definir unha estructura alxebraica en M de modo que se obteña un sistema alxebraico isomorfo a R. (E esta definición é a que xa vimos).

Volvendo agora á situación orixinal, aplicacións bixectivas do conxunto R no corpo dos números reais, as máis sinxelas que se nos pode ocorrer son as f(x)=ax+b, das que se deducen as operacións

$x\Delta y=((ax+b)+(ay+b)-b)/a=x+y+b/a$ e $x*y=((ax+b).(ay+b)-b)/a$ as cales dotan a R de estructura de corpo e, si b/a=1, fan que $2\Delta 2=5$. Estas aplicacións bixectivas así definidas permitirían definir isomorfismos entre dous conxuntos se nun deles está definida algunha estructura. Por exemplo, sexa C=(-c,c), sendo c a velocidade da luz, e R corpo dos números reais, se definimos f(x)=arctanh(x/c), f:C--->R, dótase a C de estructura de grupo abeliano respecto á suma se se define

$u\Delta v=\tanh(\mathrm{arctanh}(u/c)+\mathrm{arctanh}(v/c)).c=$

$$\frac{(\tanh(\mathrm{arctanh}(u/c))+\tanh(\mathrm{arctanh}(v/c))).c}{1+\tanh(\mathrm{arctanh}(u/c)).\tanh(\mathrm{arctanh}(v/c))}=\frac{u+v}{1+\frac{u.v}{c^2}}$$

Outro exemplo é o da suma de dúas resistencias en paralelo $R_1\Delta R_2$, que vén dada por: $\frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}$ que é unha lei $x\Delta y=f^{-1}(f(x)+f(y))$ na que f(x)=1/x.

¿Que pasa se a función é potencia par ou suma de potencias pares?. Tomemos por exemplo

$f(x)=x^2$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$, f:[0, ∞)-->R entón $x\Delta y=\sqrt{x^2+y^2}$ e o elemento simétrico de x é $f^{-1}(-f(x))$ =xi, o cal evidentemente non nos serve para definir un grupo aditivo nos números reais positivos.

Definamos agora G-Grupo, un conxunto G no que están definidas dúas operacións internas (suma e resta) para as que se cumpren as condicións seguintes $\forall$ a,b,c $\in$ G:

1) (a+b)+c=a+(b+c)

2)a+(b-c)=(a+b)-c (G-grupo dereita)

3)(a-b)+c=a-(b-c) (G-grupo centro)

4)(a-b)-c=a-(b+c) (G-grupo esquerda)

5) existe un elemento neutro e tal que a+e=e+a=a

6) e-e=e,

7)Dado a, existe a' tal que a-a'=e=a'-a

Prop. Un grupo é un G-grupo.

Abonda con definir a resta a-b=a+(-b), sendo (-b) o simétrico de b: a proba é un exercicio.

Prop. Un G-grupo é un grupo, xa que a operación (+) é interna, asociativa, ten elemento neutro, e todo elemento a ten simétrico que vén dado por a''=e-a'. Agora a+a''=a+(e-a')=(a+e)-a'=a-a'=e e, a''+a=(e-a')+a=e-(a'-a)=e-e=e. Postas así as cosas, parece que a definición de G-grupo non engade nada novo, pero supoñamos que: (definición de G1-grupo) a propiedade 2) se cumpra sempre que b≠e; a 3) sempre que a≠e,b≠e e a 4) sempre que a≠e; entón está claro que non podemos demostrar que un G1-grupo é un grupo, seguindo os pasos da demostración anterior, porque falla a demostración de existencia de elemento simétrico, pero ademais atópase un contraexemplo:

Tomemos agora como G=[1,∞) e como suma $x\Delta y=x+y-1+2\sqrt{(x-1)(y-1)}$, e como resta $x-y=x+y-1-2\sqrt{(x-1)(y-1)}$. En primeiro lugar a suma é unha operación interna, pois x>=1, y>=1, e a resta tamén, pois isto dedúcese de que a media aritmética de x-1 e y-1 é maior igual que a súa media xeométrica:

$$\frac{(x-1+y-1)}{2}\geq\sqrt{(x-1)(y-1)}$$

é asociativa e conmutativa respecto á suma, posto que está definida segundo $x\Delta y=f^{-1}(f(x)+f(y))$, sendo $f(x)=\sqrt{x-1}$, $f^{-1}(x)=x^2+1$. Ten elemento neutro, que é o 1, pero o elemento simétrico de x non se pode calcular como $f^{-1}(-f(x))$, que é x e $x\Delta x=4x-3$.

Por outro lado, a resta definiuse $x-y=f^{-1}(f(x)-f(y))$, o cal asegura que cumpre 2) (coa excepción comprobable de b=e, é dicir, b=1), 3) (neste caso non se cumpre si b=e ou a=e), 4) (tampouco se cumpre cando a=e), 6) constátase substituíndo, e 7) cúmprese porque para x, x-x=1. Exemplifiquemos en 2 os pasos a seguir para as demostracións de 2),3),4). Queremos probar a+(b-c)=(a+b)-c:,

$a+(b-c)=f^{-1}(f(a)+f(f^{-1}(f(b)-f(c))))=f^{-1}(f(a)+(f(b)-f(c)))=$

$f^{-1}((f(a)+f(b))-f(c))=f^{-1}(f(f^{-1}(f(a)+f(b))))-f(c))=(a+b)-c.$

Agora ben, se f(1)=0, como neste caso, e tal que f é cuadrática, é dicir converten $f(f^{-1}(-f(c))))$ en f(c) e non en -f(c), logo a+(1-c)=a+c e non (a+1)-c, que é a-c. Esta é a única excepción, que se podería abreviar dicindo que 1-c=c e non -c, é a causa da excepción). Así vimos un exemplo de G1-grupo que non é un grupo:

O conxunto G anterior.

Se definimos G1-grupo dereita (respectivamente esquerda, centro) como un conxunto no que están definidas dúas operacións (suma e resta) internas tales que cumpren:

1) (a+b)+c=a+(b+c),

2) a+(b-c)=(a+b)-c (G1-grupo dereita),(b≠e,

a+b≠e),

ou ben (a-b)+c=a-(b-c) (G1-grupo centro) (a,b≠e),

ou ben (a-b)-c=a-(b+c) (G1-grupo esquerda) (a≠e, a-b≠e),

3) existe un elemento neutro e tal que a+e=e+a=a,

4) e-e=e,

5) Dado a, existe a' (opoñente) tal que a-a'=e=a'-a

Consecuencias:,

1) e é o único elemento de G que cumpre x+x=x :

supoñamos que existe a tal que a+a=a e que e≠a. Entonces (a+a)-a'=a-a'=e,

a+(a-a')=a+e=a, de onde a=e.

1-1) e é o único elemento que cumpre x-x=x.

2) O opoñente de a' é a.

3) Para todo elemento a, a=2a-a'; a=a+e=a+(a-a')=2a-a', tamén a=(a+a')-a,

4) O opoñente de a é único.

4-1) c'=b' ⇒ c=b,

4-2) c'=e ⇒ c=e. e é o opoñente de e. Como é único,

5) e é único.

6-1) Simplificación pola dereita (suposto G1-grupo dereita):,

a+c=b+c ⇒ a=b. Xa que (a+c)-c'=(b+c)-c'=a+(c-c')=b+(c-c') ⇒ a+e=b+e ⇒ a=b (se c≠e). Se c=e , de a+e=b+e ⇒ a=b.

6-2) Simplificación pola esquerda (suposto G1-grupo centro):

c-a=c-b ⇒ a=b. Xa que c’-(c-a)=c'-(c-b)=(c'-c)+a=(c'-c)+b ⇒ e+a=e+b ⇒ a=b (se c≠e).

6-3) Simplificación pola dereita (suposto G1-grupo centro):

a-c=b-c ⇒ a=b. Xa que (a-c)+c'=a-(c-c')=a-e=a=(b-c)+c'=b-(c-c')=

b-e=b se a≠e e b≠e.

6-4) Simplificación pola dereita (suposto G1-grupo esquerda):

a-c=b-c ⇒ a=b. Xa que (a-c)+c'=(b-c)+c'=a+(c'-c)=b+(c'-c) ⇒ a+e=b+e ⇒ a=b (si c≠e). Se c=e , de a-e=b-e ⇒ a=b.

6-5) Simplificación pola esquerda (suposto G1-grupo dereita):

c-a=c-b ⇒ a=b. Xa que c'-(c-a)=c'-(c-b)=(c'-c)+a=(c'-c)+b ⇒ e+a=e+b ⇒ a=b (si c'≠e).

Etc...

7-1) A ecuación x+a=b ten solución (G1 grupo dereita),

(x+a)-a'=b-a'=x+(a-a')=x+e=x=b-a',

7-2) A ecuación x-a=b ten solución (G1 grupo centro),

(x-a)+a'=b+a'=x-(a-a')=x-e=x,

7-3) A ecuación x-a=b ten solución (G1 grupo centro),

(x-a)-a’=b-a’=x-(a-a’)=x-e=x=b-a',

7-4) A ecuación a-x=b ten solución (G1 grupo centro),

a'-(a-x)=a'-b=(a'-a)+x=e+x=x, etc.

8) O panorama de G1-grupos está cheo de pequenas demostracións, sinxelas, pero delicadas. Ademais abren unha morea de interrogantes. ¿Pode estenderse un semigrupo a un conxunto no que poida resolverse x+a=b, non só por simetrización, senón pasando a un G1-grupo?. ¿É factible estender N cunha resta de modo que forme un G1 grupo?. ¿Existen G1-grupos que non procedan dunha lei cuadrática ou función par?. ¿Existen G1-grupos dereita e non centro, por exemplo?. Son preguntas para contestar noutro momento.

BIBLIOGRAFÍA,

[1].ABELLANAS, P. *ELEMENTOS DE MATEMÁTICA* .Teorema de definición por isomorfía. Páx 186-188.

[2].KLINE, MORRIS. *LA PÉRDIDA DE LA CERTIDUMBRE.* Ed. Siglo XXI.

Nota: G vai por Galiza.