GAMMA
setembro 2001

OS FRACTAIS

Manuel Díaz Regueiro

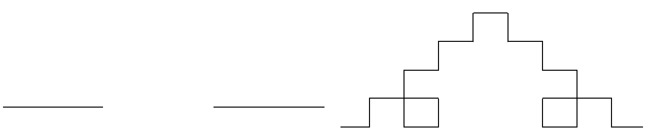
Definición de Mandelbrot

Un obxecto ou estructura é fractal, nun senso intuitivo, se ten unha forma ben sexa sumamente irregular, ben sumamente interrompida ou fragmentada, e segue a ser así a calquera escala na que fagámo-lo exame.

Receitas para cociñar fractal:

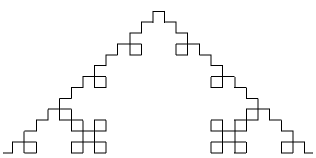
1-Conxunto triádico de Cantor. (un dos primeiros fractais descritos; Sec. XIX)

Cóllase un segmento. Divídase en tres partes iguais. Quíteselle o tercio central e engádase un cadrado sen base no seu lugar. Repítase o proceso en pasos sucesivos aplicando, en cada paso, a regra anterior a cada dos segmentos.



como límite deste proceso obtemos unha curva de lonxitude infinita, xa que cada segmento convértese en cinco segmentos de medida 1/3 do segmento anterior. A súa lonxitude é, polo tanto,

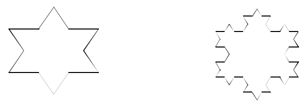
Lím $(5/3)^m = \infty$
$m \to \infty$

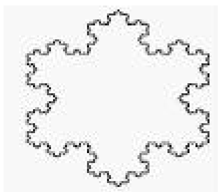


Sen embargo, esa curva encerra un área finita por riba do primeiro segmento. O conxunto triádico de Cantor non é a curva enteira, senón só os restos que quedan do primeiro segmento.

2. Fractal "á folerpa de neve”. (Curva de Von Koch)

Cóllase un triangulo equilátero. Divídase cada lado en tres segmentos iguais. Quítese o segmento central e póñase no seu lugar un triángulo equilátero sen base. Repítase o proceso como no caso anterior.





Igual que no fractal anterior, a curva ten lonxitude infinita:

Lím $(4/3)^m = \infty$
$m \to \infty$

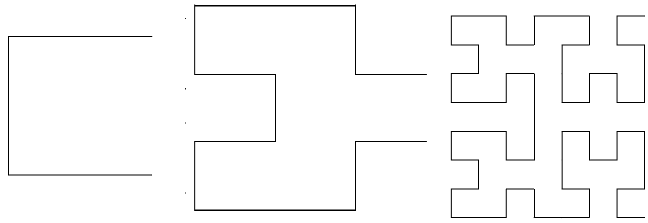
Pero encerra un área finita e, aínda sendo unha curva continua, non ten tanxente en ningún dos seus puntos.

3-A curva de Hilbert.

A curva de Hilbert (H_1) é un cadrado sen un lado. Construída a curva Hi, a curva H_{i+1} faise por composición de catro curvas H_i de tamaño metade, xirados apropiadamente e conectados por tres rectas segundo o esquema:

$\Leftarrow H_i — H_i \Downarrow$
|
$\Leftarrow$Hi — Hi$\Uparrow$

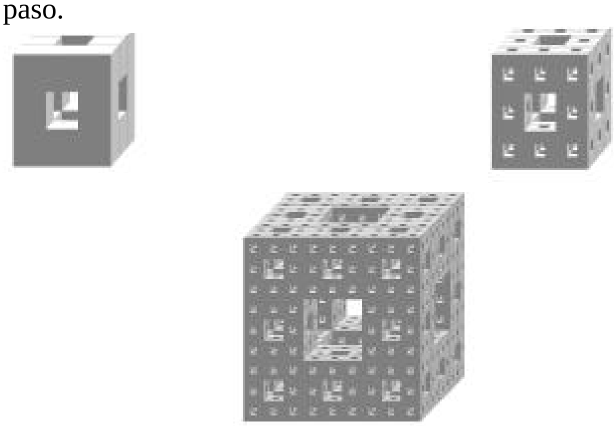
por exemplo:



De novo, a lonxitude da curva límite é infinita e pódese demostrar que enche un cadrado (de dimensión 2). A razón é que a súa dimensión fractal é 2.

4- Esponxa de Menger-Sierpinski.

Cóllase un cubo e divídase en 27 cubos iguais. Quítense os cubos do centro das caras e o cubo central. Repítase o proceso con cada cubo producido en cada paso.



As costas como fractais

Se pasamos un compás cunha abertura prefixada "a" sobre un mapa dunha

costa e medímo-la súa lonxitude aproximada deste xeito, esta será L(a)= n * a

Se repetímo-la operación reducindo a abertura do compás, atoparemos que L(a) medra cando a abertura e máis pequena, xa que a menor abertura séguense mellor as irregularidades da costa.

A costa, como tódolos fractais, ten a característica de que cada anaco do conxunto, nun senso estatístico, é, homotético, semellante ó total do conxunto. Dito doutro xeito, os fractais son obxectos que teñen sempre a mesma estructura, calquera que sexa a escala que se considere. A súa estructura é, estatística ou exactamente, invariante ós cambios de escala.

Dimensión fractal

Para unha primeira aproximación ó concepto de dimensión fractal (por demais non única, pois poderíanse dar varias definicións, non sempre equivalentes) poderemos observar que para as figuras xeométricas ordinarias, a súa medida cumpre que

sendo (A) unha figura, (A') a transformada por unha homotecia ou semellanza de razón "X" e "D" a dimensión da figura.

Por exemplo, se duplicámo-lo radio dunha esfera (A), convértese noutra esfera (A'), de xeito que:

volume(A') $=2^3$ volume(A)

superficie(A')$=2^2$ superficie(A)

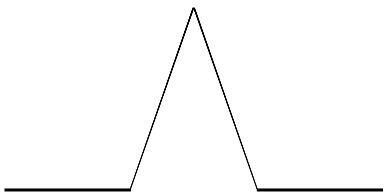
lonxitude dun círculo máximo(A')= 2 lonxitude dun círculo máximo(A)

é dicir, as áreas das dúas figuras semellantes son proporcionais ó cadrado da súa razón de semellanza, e os volumes son proporcionais ó cubo da razón de semellanza.

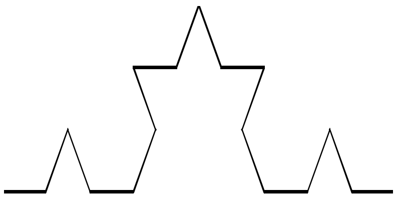
A cuestión : ¿pode haber figuras tales que a súa dimensión non sexa 0, 1, 2 ou 3, senón un número non enteiro?. Dende logo trataríase de figuras xeométricas "non ordinarias".

Centrémonos nas curvas anteriores e definamos como medida (lonxitude) aproximada dunha curva, a obtida ó segui-lo seu contorno con compás de abertura prefixada (tal como facíamos na costa). Deste xeito, eludimos deliberadamente os detalles do obxecto a medir, por debaixo dunha determinada escala (no mundo físico real tódalas medidas son así, aproximadas. Procedendo desta maneira, rectificámo-la curva no senso en que, a efectos da medición aproximada, convertémo-los seus detalles en rectos. Non veremos detalles de menor tamaño cá abertura do compás.

Apliquemos estas ideas á curva de Von Koch, e midámo-la cun compás de abertura tal que se vexa



e apliquemos unha semellanza de razón 3 veces á abertura do compás.Agora poderemos vela



posto que agora percibimos novos detalles da curva.

Se ben para calquera curva "ordinaria" ocorre que aparecen novos detalles cando a ampliamos, se a abertura do compás e moi pequena ($a \to 0$), a ampliación non revela novas miudezas (a curva é rectificable). Pero neste caso, a ampliación revela sempre os mesmos detalles, a calquera abertura do compás, pois tal é a definición da curva.

Segundo quedou dito $m(A')=3^D * m(A)$ sendo D a dimensión. Por outra banda $m(A')= 16/4* m(A) = 4 * m(A)$.

Así pois $3^D = 4$ e $D = \log_3 4$ é a dimensión fractal da curva de Von Koch.

Razoando do mesmo xeito, o conxunto de Cantor ten de dimensión fractal $\log_3 2$ e a esponxa de Menger-Sierpinski $\log_3 20$.

Volvendo a situacións "normais", ¿por qué se di entón que unha curva ten dimensión 1?. Estamos a falar de cousas distintas: desde un punto de vista topolóxico, unha figura xeométrica ten dimensión cero, se para cada un das seus puntos existe un contorno arbitrariamente pequeno, do que a súa fronteira non contén ningún punto da figura. O conxunto de Cantor ten dimensión topolóxica cero, posto que non contén ningún intervalo completo.

Unha figura xeométrica que non sexa de dimensión cero, ten dimensión "1" se, para cada un dos seus puntos, existe un contorno arbitrariamente pequeno, do que a súa fronteira ten en común coa figura só un conxunto de dimensión cero. Etc.

Desde un punto de vista topolóxico, xa que logo, as curvas seguen a ser curvas: teñen dimensión "1". En xeral, podemos dicir que a dimensión topolóxica mantense en pé polo seguinte: non e posible establecer unha aplicación bixectiva e bicontinua entre dous espacios de distinta dimensión (topolóxica) - Teorema de Brouwer (1911).

<u>A paradoxa de Olbers. (un ceo en chamas versus un Universo fractal)</u>

Xa Kepler se deu conta de que se a distribución dos corpos celestes fose uniforme, tanto de día como de noite, todo o ceo tería uniformemente a mesma luminosidade do disco solar. Explicaba Olbers (1826):

Supoñamos que o Universo é infinito en extensión. Que as estrelas son infinitas en número e están distribuídas uniformemente a través do Universo. E que teñen a mesma luminosidade media en calquera parte do Universo.

Con centro na Terra (o noso punto de mira do Universo), tracemos dous pares de esferas imaxinarias, de radios r_0, r_0+h, Kr_0, Kr_0+h, e as capas de espacio que conteñen chamémoslles A e B.

Volume da capa B$\cong K^2$ * volume da capa A, sendo así que o número de estrelas da capa B será K^2 veces o número das que hai na capa A, xa que $(Kr_0+h)^3-(Kr_0)3 = 3K^2 r_0^2$ +... “ proporcional a K^2. Por outra banda, a luz dunha estrela diminúe segundo o cadrado da distancia. Así, as estrelas da capa B, terán un brillo equivalente a $1/K^2$ do das estrelas da capa A. Pero a cantidade de luz que recibiriamos da capa B, igual ó número de estrelas multiplicado polo brillo aparente, sería aproximadamente igual a luz recibida da capa A.

Este argumento, dado que o número de capas en que podemos dividi-lo Universo é infinito, dá por resultado que a cantidade de luz que recibiriamos é infinita. Tendo en conta que as capas máis próximas obstruirían parte da luz das capas mais afastadas, este efecto reducirase a que observariamos un ceo en chamas, un ceo impregnado totalmente de brillo solar, cousa que non é o caso.

E evidente que a explicación a esta paradoxa ten que estar en que algunha das hipóteses prantexadas (Universo infinito e uniforme, número de estrelas de cada capa proporcional o cadrado da distancia á Terra, etc,) non é correcta, ou ben intervén algún outro artificio (po cósmico) que atenúa o efecto.

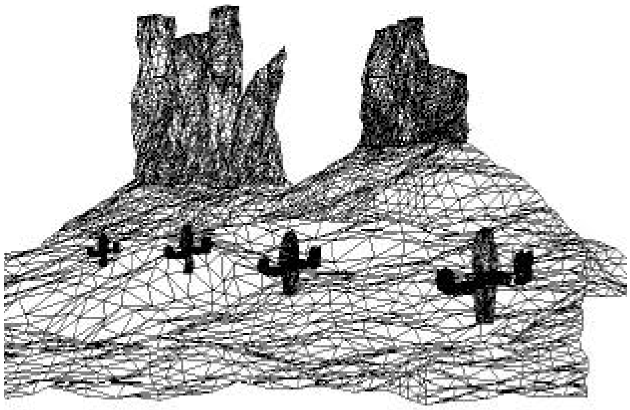
Pois ben, se supoñemos que o número de estrelas en cada capa non é proporcional ó cadrado da súa distancia á Terra, senón bastante menor, estamos supoñendo que o conxunto de estrelas do Universo é un conxunto fractal, o Universo é un fractal. E tal parece ser: a súa estructura é xerárquica, as estrelas agrúpanse en galaxias, estas en cúmulos de galaxias, estes en supercúmulos, etc., de xeito que non cumpren máis que localmente a fatídica lei do número de estrelas.

As moléculas bailan fractal

O movemento browniano, que na súa orixe é o movemento desordenado das partículas de tamaño menor de 0,2 m contidas nun líquido, foi visto por Einstein como “un refrexo das traxectorias irregulares das moléculas que constitúen a materia“. Pois ben, se microfotografiamos partículas brownianas en movemento a intervalos fixos de tempo e unimos as súas posicións con rectas de traxectoria, ocorrerá o xa visto nas costas. Se diminuímos o intervalo de tempo entre exposicións, a lonxitude das súas traxectorias será maior, pero estatisticamente terá a a mesma forma. A traxectoria terá unha forma estatisticamente invariante ó cambio de escala do tempo entre exposicións.

Imaxes de ordenador

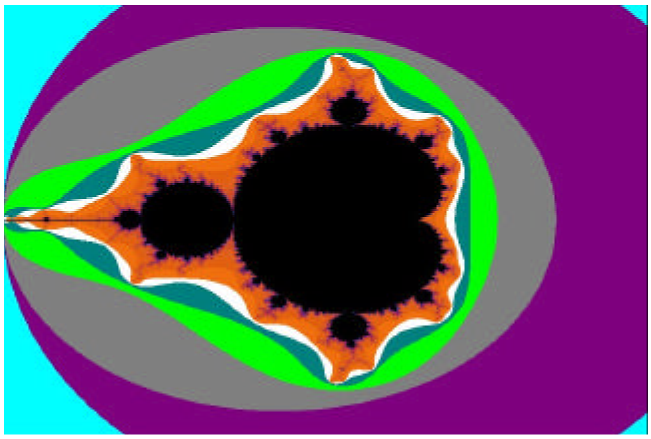
Como pequeno exemplo dunha das aplicacións dos fractais, a creación por ordenador de imaxes de aparencia realista, podemos poñer unha imaxe queamosa a trama de xeración dunha paisaxe:



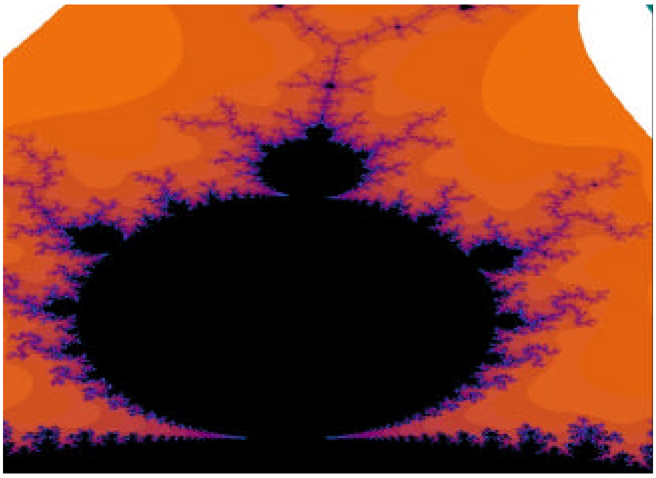
Mandelbrot e a invasión_fractal

O concepto de fractal ten como precedentes o conxunto triádico de Cantar, a función continua sen derivada de Weierstrass (1861), a curva de Peano (1890), a curva de Von Koch (1904), as curvas de Hilbert ou Sierpinski, unha definición de dimensión de contido de Hausdorff (1919) que admite dimensións non enteiras, e outros,

Non todas esas ideas foron ben recibidas polos matemáticos da época (Charles Hermite diría que abandonaba “con espanto e horror“ esta plaga de funcións que non teñen derivada). Foron consideradas por algúns como “galería das horrores matemáticos“ ou como máximo, como curiosidades matemáticas antintuitivas.



Conxunto de Mandelbrot e unha ampliación

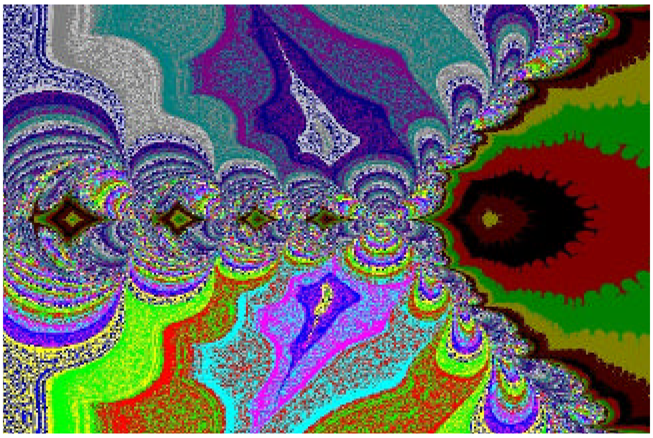


Foi Mandelbrot quen, entre 1951 e hoxe en día, deulles o seu nome: fractais, ademais de desenvolver numerosos temas relacionados con eles, subliñando a súa presencia en situacións físicas reais.

Sen embargo, non é deica os anos 80 que este concepto non se converte nun paradigma científico. Como exemplo, Mandelbrot escribe en 1975 un libro, *Os obxectos fractais*, e emprega na redacción "nós", dando a entender que eran moitos os que coincidían cás súas ideas, cando en realidade moi poucos lle prestaron atención. Na edición de 1984 do mesmo libro xa emprega "eu".

O que sucede nestes anos é que moitos dos seus conxuntos fractais foron materializados en incribles imaxes de ordenador (ver imaxes). Métodos fractais son empregados para xerar paisaxes imaxinarios pero con aparencia "realista" ("Guerra das Galaxias", "Parque Xurásico", "Titanic", "O bosque animado", etc,), en métodos de debuxo e compresión, e, en xeral, a informática divulga os conxuntos fractais, posto que teñen unha fácil informatización. Estamos no nacemento dunha matemática que Ian Stewart chama "matemática experimental":

"Chegou a ser posible utilizar o ordenador coma un instrumento experimental. Os matemáticos teñen agora a posibilidade de efectuar un percorrido a través de grandes cantidades de exemplos dos fenómenos que lles interesen e ver que resposta lles ofrece o ordenador.". Eu engadiríalle que ós alumnos pásalle o mesmo. É posible utilizar o ordenador para ensinarlles matemáticas "experimentais", a través dos exemplos creados



co ordenador.

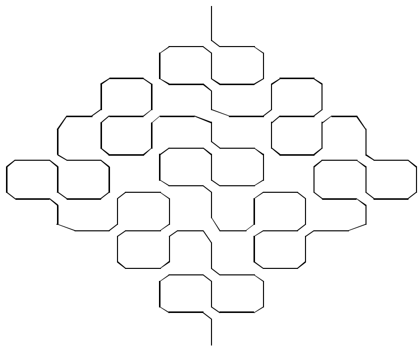
Imaxe: Fractal tipo Newton

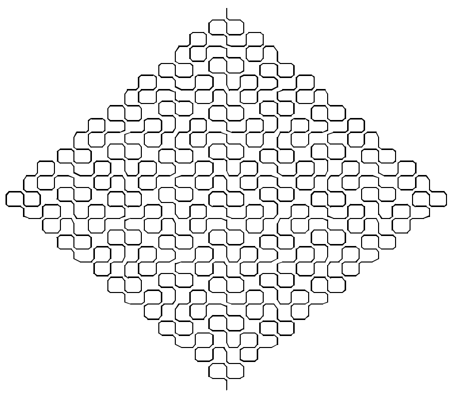
As ilustracións do artigo están feitas cun programa meu de ordenador que podría estar proximamente na web de AGAPEMA.

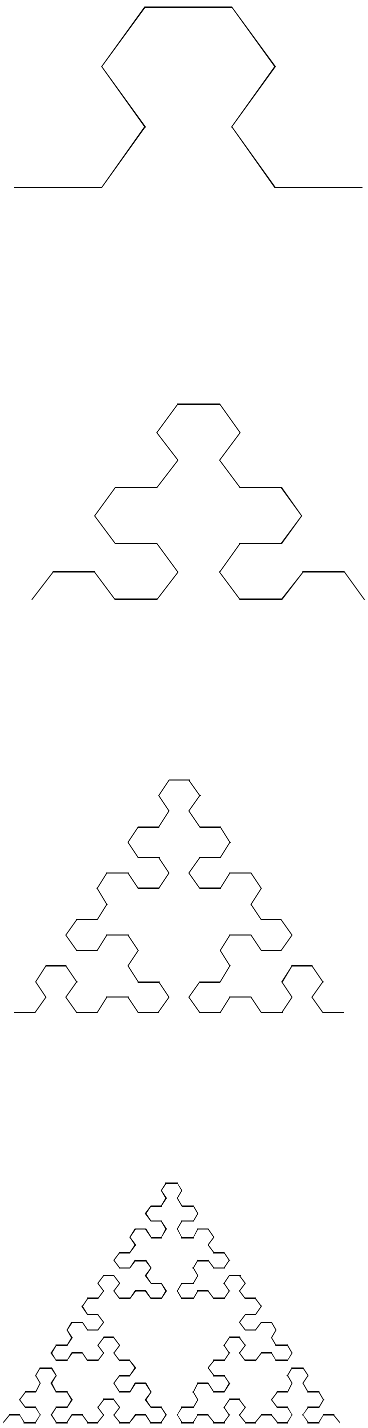
Bibliografía:

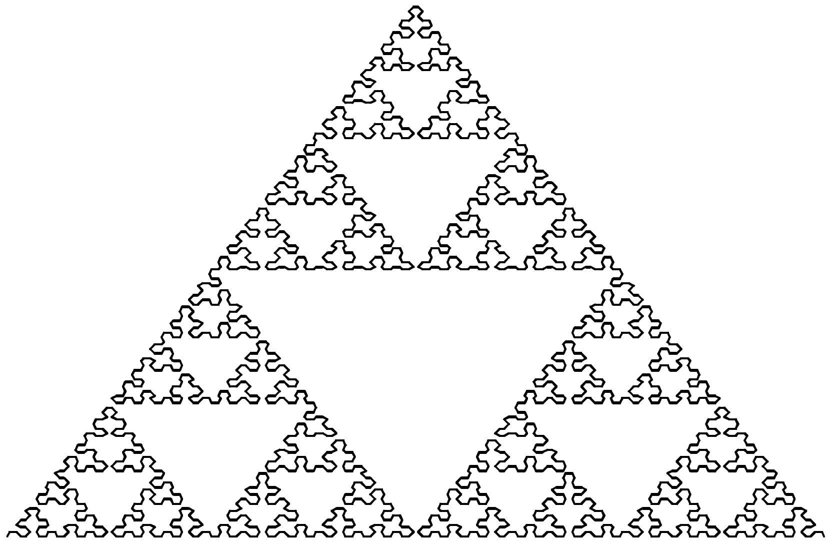
Ian Stewart. ¿Juega Dios a los dados?. Editorial Crítica. Barcelona. (2001).

Ian Stewart. De aquí al infinito. Editorial Crítica. Barcelona. (1998).

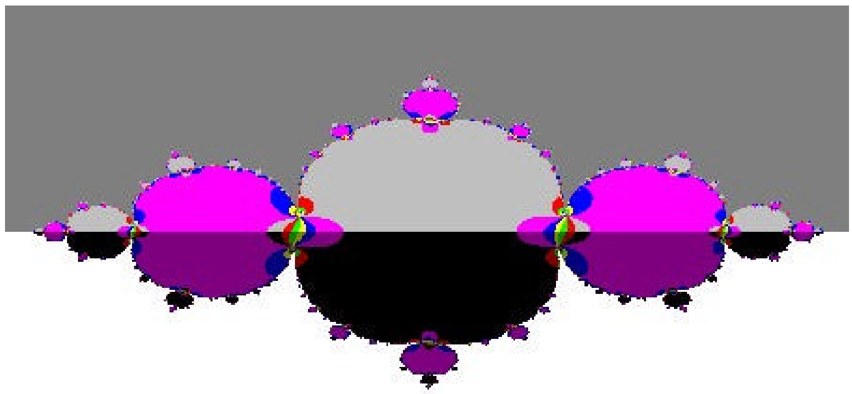


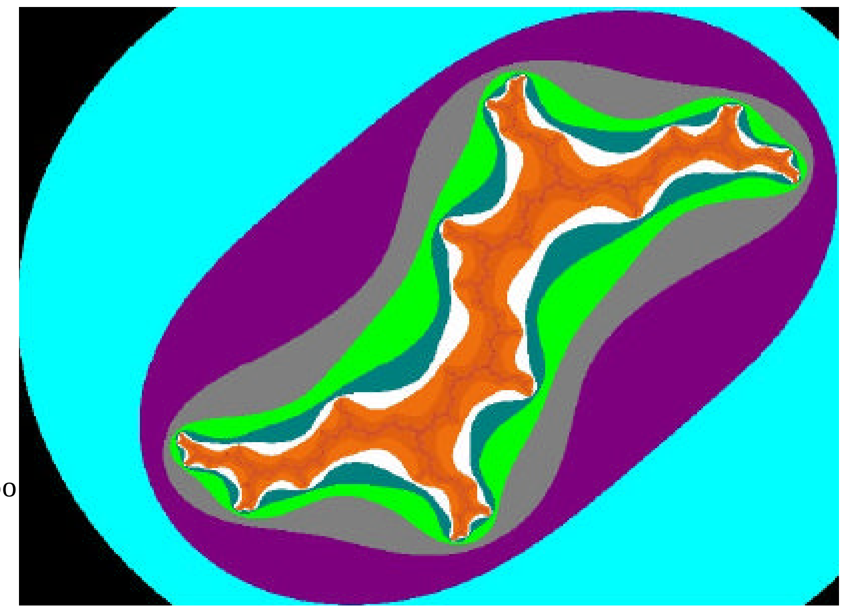






Dragón de San Marcos





Curva de Peano

Etapas sucesivas dunha curva tipo Sierpinski

Á dereita, conxunto de Julia