Revista de la Universidad de Santander - Número 2 - Parte I
UNIVERSIDAD DE SANTANDER. AÑO 1.979

FUNCIONES CICLOTOMICAS

MANUEL DIAZ REGUEIRO, Catedrático del I.N.B. "Juan Montes", de Lugo.

ABSTRACT: Denomino funciones ciclotómicas a aquéllas que tienen como transformada de Laplace $\frac{s^j}{s^n \pm 1}$ ($j = 0, \ldots, n-1$). A partir de sus desarrollos en serie y de sus expresiones como combinación de exp(jx), (donde j es una raiz n-sima de 1 ó -1), se encuentran las fórmulas de la suma, fórmulas de enlace, y otras, que hacen de estas funciones una generalización natural de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Sea un número natural $n \geq 2$.

La función L_i, que tiene por transformada de Laplace $\frac{s^{n-i-1}}{s^n - 1}$ tiene como desarrollo en serie:

$$L_i = \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+i}}{(n+i)!} + \frac{x^{2n+i}}{(2n+i)!} + \ldots$$

La función N_i, que tiene por transformada de Laplace $\frac{s^{n-i-1}}{s^n + 1}$ tiene como desarrollo en serie:

$$N_i = \frac{x^i}{i!} - \frac{x^{n+i}}{(n+i)!} + \frac{x^{2n+i}}{(2n+i)!} - \ldots$$

Son desarrollos en serie convergentes en todo R, por lo que definen funciones definidas en toda la recta real.

Para estas funciones se obtienen las siguientes fórmulas:

1) - Fórmulas de Euler:

$$e^{kx} = L_o + kL_1 + k^2L_2 + \dots + k^{n-1}L_{n-1},$$
$$e^{jx} = N_o + jN_1 + j^2N_2 + \dots + j^{n-1}N_{n-1},$$

donde k es una raiz n-sima de 1 y j una raiz n-sima de -1.

2) - Expresiones finitas de las funciones ciclotómicas:

$$L_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k_1 & \dots & e^{k_1x} & \dots & k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & \dots & e^{k_2x} & \dots & k_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k_n & \dots & e^{k_nx} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \dots & k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & k_2^2 & \dots & k_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k_n & k_n^2 & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}}$$

siendo $k_1, \dots, k_n$ las raices enésimas de 1.

N_i tiene una fórmula semejante, sustituyendo $k_1, \dots, k_n$ por $j_1, \dots, j_n$, a su vez, raices enésimas de -1.

Por ejemplo, en el caso n = 2,

$$L_o = \text{chx}, \quad L_1 = \text{shx}, \quad N_o = \text{cosenx}, \quad N_1 = \text{senx},$$

y, en el caso n = 3,

$$L_o = \frac{e^x + 2e^{-x/2} \cos \sqrt{3}/2x}{3}$$

3) - Fórmulas de Moivre:

$$(L_o + kL_1 + \dots + k^{n-1}L_{n-1})^m = L_o\,(mx) + \dots + k^{n-1}L_{n-1}(mx)$$

$$(N_o + jN_1 + \dots + j^{n-1}N_{n-1})^m = N_o\,(mx) + \dots + j^{n-1}N_{n-1}(mx)$$

4) - Fórmulas de la suma:

$$L_i\ (a + b) = \sum_{k = o}^{n - 1} L_k\ (a)\ L_{\overline{i-k}}(b),$$

entendiendo por $\overline{i-k}$ el número de o a n-1, tal que, sumado a k, da un número perteneciente a clase i (módulo n).

$$N_i\ (a + b) = \sum_{k = o}^{n - 1} (-1)^s\ N_k(a)\ N_{\overline{i-k}}(b),$$

donde $s = o$, si $k + \overline{i-k} = i$, y $s = 1$, si $k + \overline{i-k} > i$.

5) - Fórmulas de los múltiplos:

$L_i(mx)$ ó $N_i\ (mx)$ se puede obtener como expresión de sumandos con potencias de L_i ó N_i, empleando varias veces las fórmulas de las sumas o a partir de las fórmulas de Moivre.

6) - Fórmulas de paso:

$$N_i = \frac{L_i(jx)}{j^i},\ \text{(j raiz n-sima de -1).-}\qquad L_i = \frac{N_i(jx)}{j^i}$$

7) - Derivadas:

$$DL_i = L_{i-1} \qquad DN_i = N_{i-1}$$

$$DL_o = L_{n-1} \qquad DN_o = -N_{n-1},$$

como $D^k L_i(o) = \delta ik$ $D^k N_i(o) = \delta ik$ forman las L_i un conjunto de soluciones linealmente independientes de $y^{(n} = y$, y las N_i, a su vez, de $y^{(n} = -y$.

8) - Paridad:

Si n es impar, $L_i(-x) = (-1)^i N_i$.

Si n es par, $L_i(-x) = (-1)^i L_i$; $N_i(-x) = (-1)^i N_i$.

9) - Fórmulas de enlace:

Si n es impar:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = L_oN_o + \dots + N_{n-1}L_1 \\ 0 = -L_oN_1 + \dots + N_{n-1}L_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = L_oN_{n-1} + \dots + L_{n-1}N_o \end{array}\right\} \text{ n fórmulas,}$$

a las que hay que agregar: $1 = (L_o + \dots + L_{n-1})(N_o - N_1 + \dots + N_{n-1})$

Si n es par:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = L_o^2 + \dots - L_{n-1}L_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = L_oL_{n-2} + \dots\dots\dots \end{array}\right\} \frac{n}{2} \text{ fórmulas, y además}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = N_o^2 + \dots - N_1N_{n-1} \\ 0 = N_oN_2 + \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \frac{n}{2} \text{ fórmulas, a las que hay que agregar:}$$

$$1 = (L_o + \dots + L_{n-1})(L_o - L_1 + \dots - L_{n-1}).$$

10) - Fórmulas de variable compleja:

$L_i(x + iy)$ ó $N_i(x + iy)$ se pueden expresar en función de las L_i y N_i de variable real.