



## Lendo *Fibonacci*

Manuel Díaz Regueiro

### 1-O problema

Ricardo Moreno conta no seu libro de *Fibonacci* como Xoán de Palermo e Teodoro, filósofos do séquito do emperador Federico II, propóñenlle varios problemas a Fibonacci, comentando que non se coñece como chegou á solución da ecuación de terceiro grao  $x^3+2x^2+10x=20$ , nun deles.

A verdade é que o que hei contar aquí consiste en pequenas contribucións que xurdiron da lectura dese libro e outras que exemplifican como a historia pode promover a reflexión en matemáticas.

Desde logo é difícil pensar que coñecera as fórmulas da solución da ecuación de terceiro grao que descubriron compatriotas posteriores. E dentro dos métodos numéricos non ía coñecer a regula falsi ou o método de Newton. Si podería utilizar, quizais, o método da bisección.

Sen embargo, polo menos desde Herón, era coñecido o método de iteración: para resolver  $x^2=A$ , resolvemos  $x=(A/x+x)/2$  (a mesma ecuación, pese a súa distinta expresión) iterando desde o valor 1. Un método que, por outra banda, eu sinalaría como preferible a ensinar o cálculo da raíz cadrada cun algoritmo “máxico” ou de moi difícil explicación como o que aínda se está a ensinar nas escolas, perfectamente xeneralizable ao cálculo da raíz enésima  $x^n=A$ , xa que nos daría  $x=(A/x^{n-1}+x)/2$  e perfectamente exemplificable cunha calculadora ou cun ordenador, que, por outro lado, fan innecesario o seu cálculo.

Se educación é o que queda cando esquecemos todo o que nos ensinaron, como dixo un ministro inglés hai séculos, o método de Herón ten moito máis de educativo co método da raíz cadrada “escolar” en tanto que facilmente reproducibile, inesquecible e de moita

menor complexidade.

Pois ben volvendo a Fibonacci é posible que resolvera a ecuación por iteración  $x=20/(x^2+2x+10)$

Se o implementamos nun programa de ordenador de poucas liñas- en Pascal, temos

```
x:=1;x1:=2;
while abs(x-x1)>1e-15 do
begin
x:=x1;
x1:=x/(x2+2x+10);
end;
```

en poucos pasos a resposta 1,36880810782137. Que curiosamente difire a partir da sexta cifra da de Fibonacci. Comentando isto con Ricardo suxire que foi algún erro do copista do libro de Fibonacci, máis que do propio Fibonacci, e que Woেকে coincide con ese valor da solución e que podería ser ese o método de cálculo feito por Fibonacci.

Queda pois, finalmente, un bo exemplo de que preguntarse ¿Como poido resolver este problema, como o faría Fibonacci? Pode dar moito máis xogo na clase que indo ao último programa de ordenador a buscar a solución.

### 2-SUMAS TELESCÓPICAS XENERALIZADAS

Aplicando sumas telescópicas é posible calcular  $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n$  e  $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2$  sendo  $F_k$  os números de Fibonacci. Nas sumas telescópicas habituais é posible colocalas en dúas columnas nas que as diagonais dan suma cero. ¿Qué pasa se en vez de dúas collemos n columnas?. Vexamos un exemplo.

A suma de  $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$  é calculable telescopicamente cando  $P(x)$  e  $Q(x)$  son polinomios tales que

grao( $P(x)$ ) < grao( $Q(x)$ )-1 =  $n-1$  e  $Q(x)$  ten  $n$  raíces ( $i = 1, \dots, n$ ). Ademais o sumatorio comeza nun número que exclúa toda anulación do denominador.

Dado que as  $n$  raíces do denominador son distintas: .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Polo que  $P(x) = A_1(x-a_2)\dots(x-a_n) + \dots + A_n(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})$  e como  $P(x)$  ten un grao menor de  $n-1$ , necesariamente  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0$ .

Como

$$\frac{P(1)}{Q(1)} = \frac{A_1}{1-a_1} + \frac{A_2}{-a_1} + \dots + \frac{A_n}{-a_1-n}$$

$$\frac{P(2)}{Q(2)} = \frac{A_1}{2-a_1} + \frac{A_2}{1-a_1} + \dots + \frac{A_n}{-a_1-n+1}$$

.....

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{A_1}{n-a_1} + \frac{A_2}{n-a_1-1} + \dots + \frac{A_n}{-a_1-1}$$

Vemos que a suma dos coeficientes da diagonal é nula, e o mesmo pasa coas seguintes.

Polo que esa suma infinita dá igual á suma das diagonais, que sempre suman cero máis as  $n$  primeiras diagonais incompletas. Logo o resultado final é a suma desas primeiras diagonais incompletas.

Deste xeito, xorden os casos particulares:

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)} = 1, \text{ xa que (suma telescópica simple)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{4}, \text{ xa que, neste caso, } A_1 = 1/2, A_2 = -1, A_3 = 1/2$$

$$\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots = \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

Este resultado pode xeneralizarse sempre que as raíces do denominador estean en progresión aritmética, ( $i = 1, \dots, n$ ).

A verdade que este pequeno exemplo xurdiu da lectura de "Fibonacci" de Ricardo Moreno. E responde, tanxencialmente á pregunta: Dado que todo nº racional pode expresarse como suma de fraccións de

numerador 1. ¿É certo que tamén todo nº irracional o é? Parece claro que o é de infinitos sumandos. Pero toda suma de infinitos sumandos de fraccións dese tipo- fraccións exipcias se lle chaman noutra bibliografía- non ten porque ser necesariamente un número irracional. Para exemplo, o citado antes. Xorde a pregunta, que deixamos ao lector, de cales son esas excepcións e que teñen que ver coas sumas telescópicas.

Nas páxinas 158-161 de G. Polya (1966) fanse varias demostracións de que .

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

Entre elas, a máis breve, é a que utiliza unha descomposición telescópica (aínda que neste caso tense que ter en conta que non é unha suma infinita senón finita).

Seguindo a Apostol (1965) poderíamos definir estas series  $a_n$  tales que existen outras series  $b_{in}$  ( $i=1 \dots k$ ) tales que  $a_n = b_{1n} + b_{2n} + \dots + b_{kn}$  e que cumpren que  $b_{1n} + b_{2n+1} + \dots + b_{kn+k-1} = 0$  (as sumas diagonais son cero). Entón  $\sum a_n =$  Suma das  $k-1$  primeiras diagonais incompletas (con menos de  $k$  sumandos). Se a suma é de  $n$  sumandos será igual a suma das  $k-1$  primeiras diagonais incompletas e das  $k-1$  últimas diagonais incompletas.

### Bibliografía.

Ricardo Moreno Castillo (2004). *Fibonacci*. Editorial Nivola, Madrid.

George Polya (1966). *Matemática y razonamiento plausible*. Editorial Tecnos SA. Madrid.

Tom M. Apostol. (1965). *Calculus. Volumen I*. Editorial Reverté, Barcelona.