MARTINGALAS

Manuel Díaz Regueiro
Centro de Formación e Recursos de Lugo

Resumo

Visualizar no ensino da matemáticas pode ser a diferenza entre un rapaz que aprende e un rapaz que suspende. Pero é que en realidade aprender esa competencia é crucial nun mundo no que é imperativo visualizar, resumir en imaxes a información para obter coñecemento. Coas martingalas exemplifícase que aínda nas propias matemáticas tamén é decisivo.

Abstract

To visualize when teaching mathematics can be the difference between a boy that learns and a boy that fails. But in fact learning that competence is crucial in a world where it is commanding to visualize, to summarize the information in images in order for us to obtain knowledge. When it comes to martingales, it is illustrated that even in mathematics visualizing is decisive.

O PORQUÉ DA VISUALIZACIÓN. O IMPERATIVO VISUAL

Que é visualización da información e porqué é importante e decisiva na nosa era? Poderiamos definila como a representación visual de datos abstractos, mediante o uso de ordenadores como medios interactivos, para amplificar o seu entendemento (Card, Mackinlay, Shneiderman).

No mundo en que vivimos, dende hai poucos anos, temos aí fóra megas de terabytes esperándonos. Moi pouca desa información a podemos trasladar ao noso cerebro. Incluso a lectura é un proceso pouco eficiente de translación. Iso é o que dicimos cando queremos dicir que os nosos alumnos viven nunha era da imaxe. Pero presentémonos este problema: temos megabytes de información e queremos trasladala ao cerebro de modo que esa información chegue o antes posible. Cal é a solución deste problema?

Que sentido posuímos que sexa quen de procesar unha morea de información por segundo? Se sabemos que o oído a procesa a unha velocidade de 100 kb/s e a vista a 100 Mb/s, penso que non temos ningunha dúbida de que nesta era da información o sentido que funcionará máis é o sentido da vista.

Estamos inmersos na información visual e, nin o noso alumnado nin nós mesmos estamos deixando de ler por casualidade ou por vagancia, senón por necesidade. Este é un aspecto sobre o que poucas veces reflexionamos.

Poderiamos denominalo -seguindo a Kant- como o **imperativo visual**: para procesar a inxente cantidade de información que nos invade é imperativo desenvolver esaxeradamente os recursos simbólicos e visuais ou envolver a información en roupaxes visuais.

Así é que a visualización está a piques de converterse nunha ciencia e non pasarán moitos anos ata que ser "licenciado en visualización" deixe de ser unha fantasía.

De feito, moitos problemas o son porque non adoptamos unha adecuada estratexia de visualización dos datos (no xenoma, por exemplo).

Esta licenciatura en visualización (na que Bourbaki e os seus libros serían o contraexemplo perfecto) ten unha pedra fundadora no clásico e notable precedente de Minard, quen en 1869, describe os datos da campaña de Napoleón en Rusia nunha gráfica, que conta por si soa unha historia que esixiría moito máis de mil palabras (Fig. 1).

Pois ben, temos un dilema no ensino, rexeitamos a imaxe (e ás veces parece que con razón, sabemos e coñecemos que hai imaxes equívocas) e as visualizacións no ensino das matemáticas "porque se prestan a engano", un curioso razoamento de alguén que descoñece que os textos escritos poden ser confusos, mentireiros, enganosos e simplemente falsos, como sabemos o profesorado que lemos razoamentos de alumnos que queren responder algo escrito cando non teñen nin idea do que queren dicir. Ou os avogados que fan da interpretación de texto escrito unha arte. Pero tamén moitas veces se quere dicir algo e os resultados son

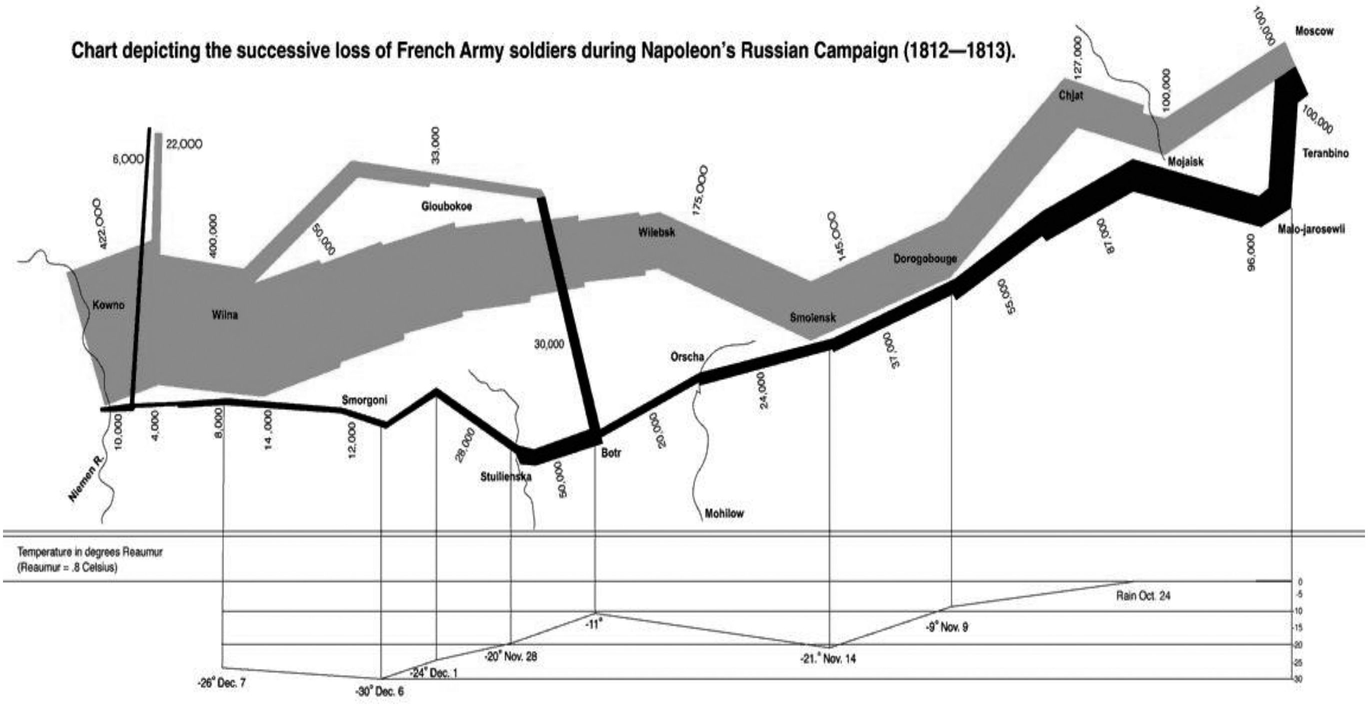


Fig. 1

manifestamente inintelixibles, incomprensibles, e confusos. En matemáticas isto abunda, lémbrense as demostracións erradas ou falsas de moitos teoremas, entre eles o último teorema de Fermat.

Porén, rexeitar a imaxe é rexeitar o principal camiño ou vehículo de información para un alumnado que vive na era da información na que todo o mundo, agás certo profesorado de matemáticas, se presta a mimalo presentándolle esa información a plena satisfacción, visual, e incluso manipulativa (en xogos de ordenador).

O discípulo de Bourbaki, en cambio, conta e conta auditivamente o seu longo rolo e usa a vista para sinalar que o que di tamén pode ser visto ou lido no libro, cando non en penosas e enganosas imaxes debuxadas a xiz no encerado de hai mil anos. É que o alumnado esfórzase pouco… Di o seguidor de Bourbaki.

Preocupados pola aprendizaxe da verdadeira demostración, algúns dirán que a xeometría dinámica engana porque non permite sufrir para coñecer unha propiedade xeométrica. Ou que algún alumno ou alumna pode chegar a conclusións erróneas, sen ter en conta a porcentaxe de alumnado que chega a conclusións erróneas mirando os espléndidos garabatos feitos co xiz.

Todo isto que precede é para introducir unha demostración dun teorema sobre martingalas do que só darei varias imaxes. Presento unha demostración con imaxes de ordenador e ademais sinalo que esa demostración visual será suficiente para que este artigo e os resultados que ofrece sexan mellor recordados polos lectores que se fose recreado con centos de fórmulas …

MARTINGALA

É un sistema de apostas na que debes dobrar a aposta despois dunha perda. Así na primeira vez apostas 1 unidade e se perdes apostas 2, se volves a perder, apostas 4, etc. No momento en que gañes volves a apostar 1 unidade, para, se volves a perder, apostar de novo 2 unidades…

Un sistema de aposta que produce unha falsa confianza no que aposta e da que seguro son fieis difusores os casinos. Efectivamente se un mira a figura 2, que simula unhas partidas seguindo o sistema, pode ver que hai moitas crises ou momentos no que o apostante ten que poñer riba da mesa grandes cantidades de diñeiro.

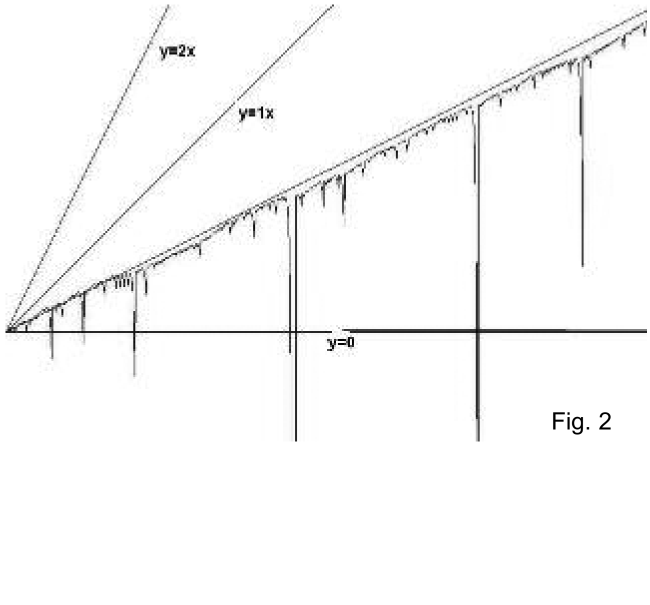


Fig. 2

E é doado pensar que nalgún momento non terá os cartos suficientes, e isto ven dado porque a pesar de que pensamos que os eventos raros (10 perdas seguidas, por exemplo) non se producen, se esperamos o tempo suficiente teñen unha esperanza suficiente para que sexa esperable a súa realización. Ademais, por se isto non fose suficiente, os casinos limitan o máximo da aposta para que o sistema non poida funcionar.

Isto presenta un aspecto pouco tratado no ensino de secundaria como pode ser este exemplo: Lanzamos unha moeda ao aire 10, 100, 1000, 1000000… veces. Cantas veces necesitamos lanzala para que a percepción de que ocorran 10 caras seguidas sexa a de frecuente?

Para iso estudamos esta distribución que exemplificaremos da maneira seguinte. Lanzamos 100 veces unha moeda. Expresado en uns e en ceros o resultado pode ser:

0010010000000100101011100000100 01
01101100010101111101111101001011 11
10011110011111001010011000010001 1

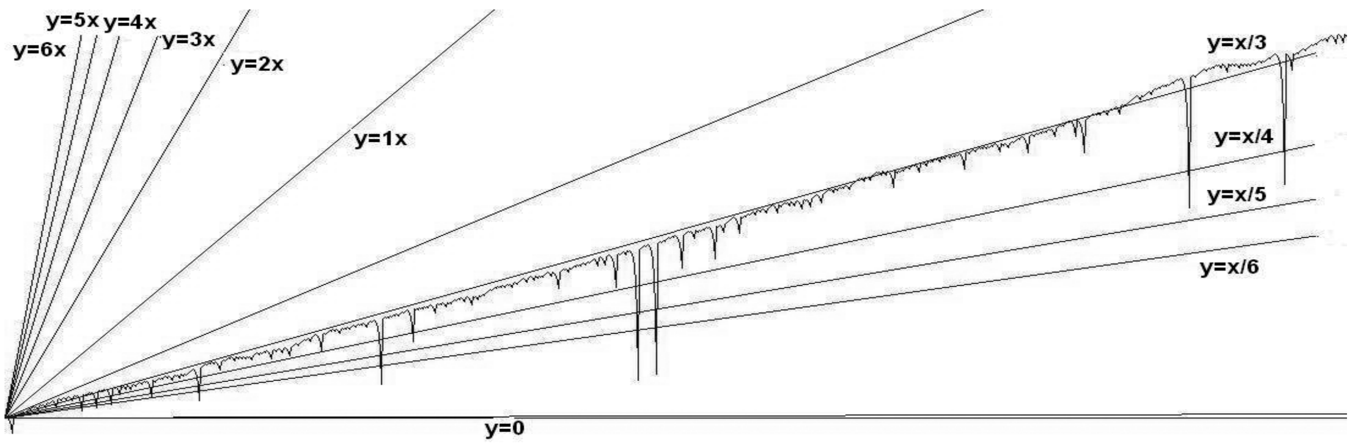
Agora este resultado o codificamos da forma seguinte: “2x1y2x1y7x1y2x1y1x1y1x3y5x1y3x1y1x2y1x2y3x1y1x1y1x5y1x5y1x1y2x1y1x5y2x4y2x5y2x1y1x1y2x2y4x1y3x2y”, no que “2x” significa dous ceros seguidos e “3y” tres uns seguidos. Recontando neste exemplo sabemos que saíron catorce ceros illados e dez uns illados, saíron tres veces dous ceros xuntos e nove veces dous uns xuntos, etc. Cal é a distribución de probabilidade para a variable saír exactamente *n* caras seguidas?

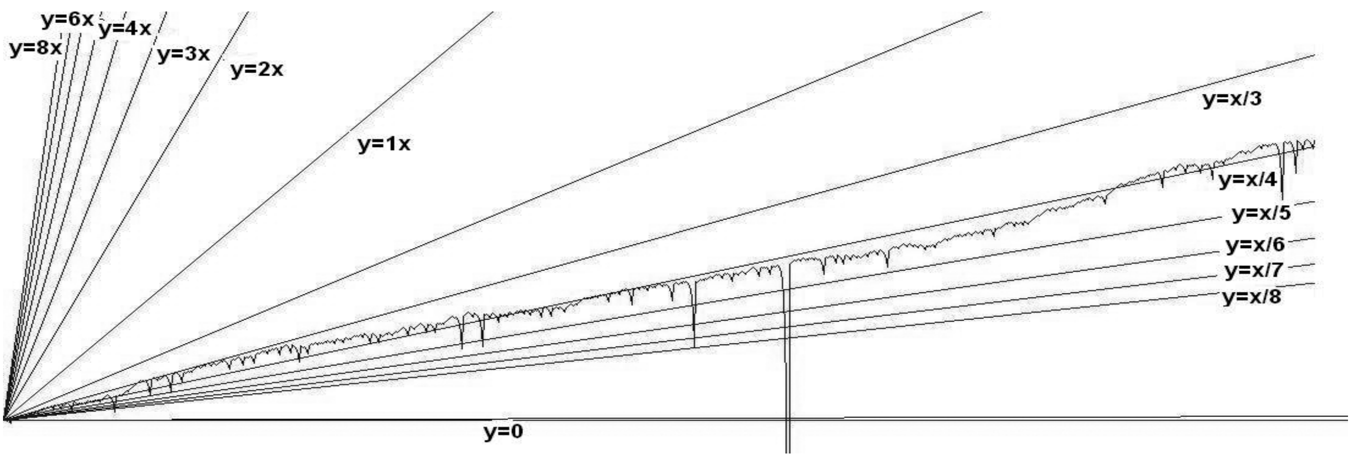
$$P(X=n)=\frac{1}{2^{n+2}}$$

No caso de 10 lanzamentos seguidos saíndo sempre cara, por exemplo despois de lanzar *x* veces unha moeda ese caso de 10 caras seguidas vai perdendo "rareza", ata comezar a percibirse como relativamente frecuente se pasamos dun certo número. Canto? Pois tanto como que con *x* lanzamentos o número esperado de sucesos “exactamente 10 caras seguidas” será de:

$$\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2^{10}}$$

Agora podemos calcular perfectamente cantos lanzamentos son precisos para ter un número dado de sucesos dos que falamos. E polo tanto entender que non é mais que a repetición de lanzamentos o factor que fai que un suceso "raro", en principio, como poida ser saír “exactamente 10 caras seguidas” se converta nun suceso do que é posible sinalar múltiples exemplos. Así se *x* é un millón de veces podemos esperar 244 repeticións do suceso. Agora poderiamos dicir que a percepción persoal é de que un suceso moi raro, pero a estatística colectiva, a percepción digamos





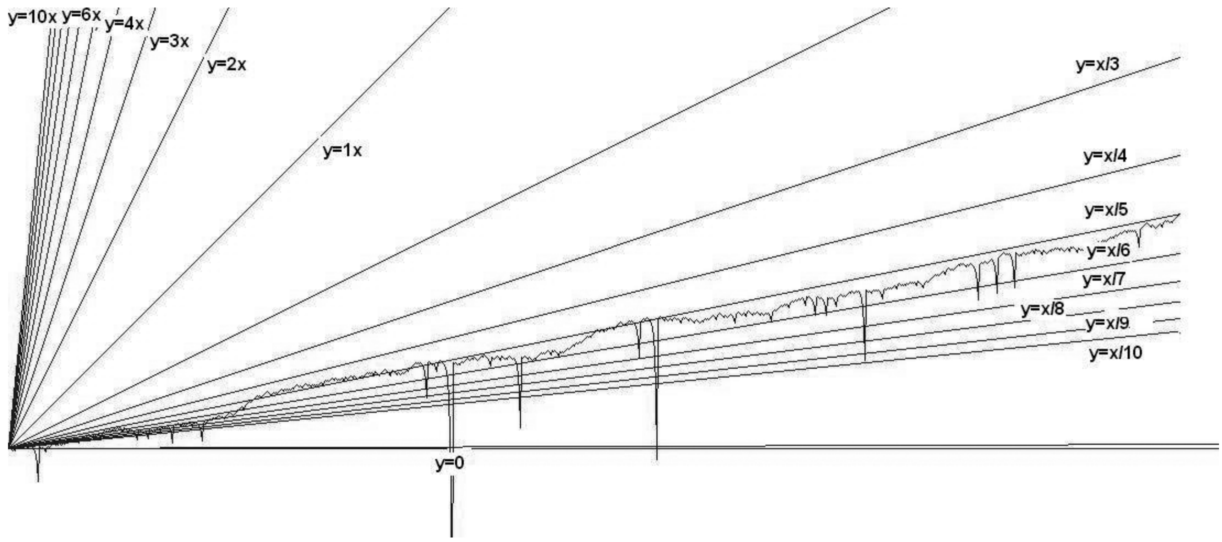
periodística do experimento, aínda seguindo a ter a mesma probabilidade, é totalmente distinta se repetimos frecuentemente ese experimento ou non.

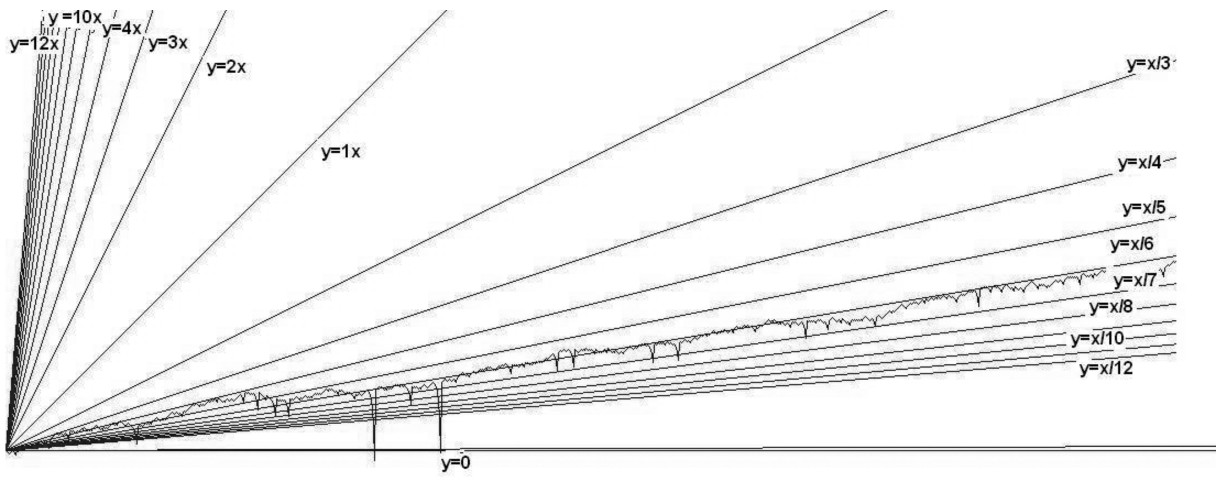
Pero, volvendo á imaxe parece que nos garante o seguinte: pese as crises, ao final, a cantidade do eixe das Y que representan os cartos no noso peto alcanzan un valor máis que satisfactorio.

Ben, se seguimos coas martingalas hai outros sistemas de apostas distintos. A gran martingala é un deles. Neste, en caso de perda dobrase a aposta e súmaselle unha unidade máis. Neste caso garántese unha maior ganancia a costa dun maior risco (será máis frecuente que non teñamos os cartos para seguir xogando). Se non era recomendable xogar coa martingala, menos o será coa gran martingala.

Agora se me ocorre preguntar se podemos atopar un sistema de martingala con menos riscos aínda que con máis paciencia? E a resposta que atopei foi a seguinte: dupricase a aposta só cada *n* xogadas perdidas. O sorprendente é que segue a funcionar como martingala. E as imaxes (corresponden a martingalas dobrando a aposta cada 3, 4, 5 ou 6 perdas) mostran o teorema.

Podemos percibir visualmente que ao aumentar o valor *n* (número de perdas que esperamos para dobrar a aposta), fanse menos esperables grandes crises e pola contra fanse menos axustados a recta que se marca, a tendencia a seguir a recta é menos definida, pero suficientemente aceptable.





Bibliografía

ALSINA, C.; NELSEN, R.B. (2006): *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics* (Classroom Resource Material), The Mathematical Association of America.