γ3 GAMMA setembro 2003

Entender las medias (2+2=5, (II))

Manuel Díaz Regueiro

Resumen. Diferentes tipos de medias tienen carta de naturaleza en matemáticas desde los pitagóricos, y son el resultado de hacer una media aritmética pero con aritméticas derivadas. A pesar de eso, sus aritméticas no están reconocidas, expresadas, ni son utilizadas en diferentes problemas, incluso elementales. Se afirma que la comprensión y la admisión de que estas aritméticas son "reales" y están en numerosos ejemplos físicos, ya en la enseñanza secundaria, la admisión de que son naturales y imprescindibles en ciertos problemas, producen un resultado notable: una mayor economía de pensamiento -que diría Mach-. Para esto se recorre un amplio camino que va desde la media de las notas, pasando por las magnitudes derivadas hasta las derivadas "derivadas".

Para entender las motivaciones que me llevan a hacer este pequeño artículo, tengo que señalar que es un tema sobre el que, realmente, hay mucho que decir desde puntos de vistas muy variados. En primer lugar, y de forma sorprendente, el tema aparece ya en la propia profesión de profesor. Cuando hacemos una media de notas de clase, ¿que estamos haciendo? ¿Por que una media y no una mediana? por ejemplo.

La media de las notas

Un tema tratado por los medios de comunicación este verano en nuestra comunidad fue el de las notas de matemáticas, en particular la baja nota media de matemáticas de los alumnos en la Selectividad. Aparte de que se pueden hacer muchas consideraciones sobre este tema, a uno se le puede ocurrir hacer una media de las notas que tenga en cuenta el número de horas semanales dedicadas a las matemáticas en los años de secundaria, y comparar las notas medias teniendo en cuenta ese factor. O un segundo factor: el porcentaje de población que se presenta a la selectividad de entre todos los jóvenes de la edad que corresponde a la prueba.

¿Como hacerlo? M=m*diversidad(% de población)/nº de horas semanales. Corregid las tablas de los últimos 40 años y se verá que tanto los alumnos como los profesores actuales ganan en perspectiva, se agrandan.

Y esto se aplica no sólo a estas notas, si no a las de toda la primaria o secundaria. Es un hecho contrastado que las notas de matemáticas son bajas. Pero el profesor de matemáticas no es un mago que explique los mismos temas abstractos en la mitad de tempo en el que se explicaban hace pocos años y con una diversidad de alumnos varias veces mayor. En realidad, la enseñanza de las matemáticas mejoró, el interés del profesorado por la Educación Matemática y por la mejora en su profesión también, lo prueban los 200 asistentes al Congreso de AGAPEMA en junio y la misma existencia de AGAPEMA y GAMMA.

Sin embargo, el hecho es que, aún teniendo en cuenta estes aspectos, sería deseable que la enseñanza de las matemáticas mejorase aún más.

Antibi (1988) ve las notas de matemáticas de una manera pesimista: "Así, a todos los niveles, se puede decir que hay en nuestra manera de evaluar a los alumnos una clase de constante: la proporción de malas notas". a esta constante la llama la "constante macabra". ¿Que pasaría, se pregunta, si un profesor no diese en un curso una nota menor de 12 sobre 20? Desde luego, podemos decir, no sería coordinador de matemáticas de la Selectividad.

Entre los profesores de matemáticas es relativamente frecuente encontrar la medida educativa como magnitud intensiva. En realidad relacionada con el concepto de que las "medidas" siguen una distribución normal y, por lo tanto, se trata simplemente de traducir las notas a unos datos de media 5 y desviación típica generalmente 1 o 2.

O, de modo mas general y mas reconocible por todos nosotros, ponemos la nota de corte en una cierta cantidad. ”Este año pusimos en septiembre el aprobado en 3,2”, lo cual viene dado porque en septiembre los alumnos saben aún menos que lo que sabían en junio y debemos “bajar el nivel”.

En otro caso, un presidente de un tribunal de oposición ajusta las notas -bajas- de modo que el número de aprobados coincida exactamente con el de plazas.

En general, suponemos que con que las notas estén bien ordenadas ya son justas: “Si apruebo este alumno, tengo que aprobar a otros dos”, “las notas de la selectividad son bajas porque el examen estaba mal planteado, pero todos están en las mismas condiciones, por lo que da igual”.

Si quisiéramos medir teniendo en cuenta la posición de la nota de cada examen del alumno dentro de las notas de su clase, ¿cuál sería la medida apropiada en este caso? Una media numérica factible es calcular la media de las posiciones del alumno en cada examen de la clase y asignarle la nota correspondiente al alumno que ocupa esa posición en la ordenación por sus notas medias (o un valor interpolado). Este es un primer ejemplo, entre otros que aparecen en el artículo, en el que para un fenómeno natural tenemos dos medidas factibles, escogemos una de ellas como fundamental –la priorizamos- y calculamos la media de la magnitud secundaria en función de la primaria.

La media del peso y la altura del alumno

En *Matemática e Educação*, de Nilson (2002), se le dedica un capítulo a *Medida e Avaliação* en el que nos cuenta como en análisis de textos ingleses “medida” tiene 40 significados distintos, y comenta el libro de Hardie *Truth and Fallacy in Educational Theory* (1942). En este libro, Hardie cuestiona las bases teóricas de la medida en Educación.

Y clasifica las magnitudes en tres tipos:

-Magnitudes Intensivas

Ejemplo, la dureza. Sabemos clasificar, ordenar los objetos por su dureza, pero no les asignamos un valor, o este tiene un sentido igual al de numerar casas en una calle o podría ser dado por letras del alfabeto. Si la única manera posible de medir en Educación fuese esta, dice, la mayoría de los cálculos que los educadores llevan hecho serían una pérdida de tiempo.

-Magnitudes fundamentales

En este caso, además de la posibilidad de ordenación de las magnitudes debemos exigirles a estas que sea posible definir la “suma” en el conjunto de tales magnitudes.

La longitud, masa, área, son ejemplos de magnitudes extensivas fundamentales.

En Educación, Hardie, ve muy difícil situar sus medidas entre las magnitudes fundamentales por el sentido que se le puede dar a la suma. “Reunir notas como las de gramática y redacción en una única nota de Lengua resulta casi tan significativo como sumar los pesos y las alturas de los alumnos y ordenalos por los valores suma de tales medidas” dice Azanha en *Avaliação do rendimento escolar(1969).*

-Magnitudes derivadas

Dos ejemplos ilustran estas magnitudes: la temperatura y la densidad.

En estes dos casos puede establecerse la ordenación (mas caliente, menos; mas denso, menos denso) y incluso definir una escala para atribuír valores numéricos. Según Hardie, estas magnitudes se caracterizan porque existe una fórmula (función) que relaciona la magnitud derivada con magnitudes extensivas fundamentales. En el caso de la temperatura PV=nRT; para la densidad d=m/v. A través de tales fórmulas serían posibles las medidas indirectas de *T* y *d*, utilizando las medidas de las magnitudes fundamentales relacionadas. Hardie intuye que las medidas educativas son deste tipo, magnitudes derivadas, correspondiendo a leyes aún por descubrir; y que pide no se demore su descubrimiento.

Estas magnitudes derivadas, en otros libros llamadas **medidas indirectas**, estaban en el centro del artículo “2+2=5” de *GAMMA* nº 1. En Hardy (1951), se dice que si f es una función continua y estrictamente monótona, tiene una inversa f^{-1} que satisface las mismas condiciones, lo que permite definir la media (sobre el intervalo en el que se cumplen esas condiciones) $M=f^{-1}(\sum f(a_i)/n)$ y, **podríamos añadir, la suma** $\boldsymbol{S= f^{-1}(\sum f(a_i))}$**.**

Pongamos un ejemplo de la clase: los problemas y ejercicios de tareas y esfuerzos compartidos -o de grifos para llenar una piscina- que tenemos costumbre de poner a nuestros alumnos: Sabemos que la realización de cualquiera trabajo se facilita y acorta en el tiempo cuantos más medios se pongan en esto.

Es decir, que el tiempo en estos problemas es una magnitud derivada, y su suma sigue la regla de que es menor que cualquiera de los sumandos $A\Delta B<A$; $A\Delta B<B$, para valores A, B, estrictamente positivos.

Si esta regla de suma es $A\Delta B=AB/(A+B)$, cumple las condiciones. Esta regla no es otra que $A\Delta B= f^{-1}(f(A)+f(B))$, siendo $f(x)=1/x$.

¿Se resuelven así todos estos problemas? Si. Por lo que ¿no sería mejor declaralo así?

O sea, que tenemos tres situaciones posibles, para valores A, B positivos:

1-$A\Delta B>A$; $A\Delta B>B$. Suma habitual, magnitudes fundamentales, proporcionalidad directa. Ejemplos, la longitud, el área, el volumen, la masa, etc... la suma es arquimediana. Se aplica a resistencias colocadas en serie. Si la magnitud es derivada, los ejemplos pueden ser $f(x)=x$, $f(x)=x^2$; $f(x)=x^3$, $f(x)=\ln(x)$ (si *a*, *b* son mayores que 1, en el caso que *a*, *b* fuesen menores que 1, o uno mayor y otro menor que 1, estariamos en el caso 2), $f(x)=e^x$,(*a*, *b* positivos, si son negativos, caso 2) y, como caso general siempre que f^{-1} sea creciente y f tome valores positivos, pues entonces de $f(B)+f(A)>f(A)$, deduciremos que $A\Delta B>A$, (ídem para B), o bien que f^{-1} sea decreciente y f tome valores negativos, pues entonces de $f(B)+f(A)<f(A)$, deduciremos que $A\Delta B>A$, (ídem para B),...

2- $A\Delta B<A$; $A\Delta B<B$. Como en la suma $A\Delta B=AB/(A+B)$, ya que $ab/(a+b)<a$ y menor que b, un caso de magnitudes derivadas, y en proporcionalidad inversa. Esa suma es no arquimediana. Se aplica a las resistencias colocadas en paralelo.

Suma del tipo $A\Delta B= f^{-1}(f(A)+f(B))$, A y B son magnitudes derivadas de otras fundamentales mediante la función f. Ejemplo, tiempo en ejercicios de esfuerzos compartidos; otros ejemplos pueden ser $f(x)=x^{-1}$, $f(x)=x^{-2}$; $f(x)=x^{-3}$, $f(x)= \exp(-x)$, $f(x)=\exp(1/x^2)$, o también si f^{-1} es decrecente y f toma valores positivos, pues entonces de $f(B)+f(A)>f(A)$, deduciremos que $A\Delta B<A$, (ídem para B), o.....

3-$A<A\Delta B<B$. Este caso no se puede dar para funciones f estrictamente crecientes o decrecientes y continuas, puesto que implicaría que (si f es creciente) $f(A)<f(A)+f(B)<f(B)$, de donde deducimos que $f(A)<0$ y $f(B)>0$. Si A y B son puntos próximos y f es continua, esto no sería posible.

Este análisis contrasta con el de “La estructura de los conceptos científicos” de Mosterín. En el divide las magnitudes sólo en intensivas y extensivas (aditivas), si bien habla de metrización fundamental y derivada. Pero el mejor ejemplo de confusión entre formalismo y realidad se da al hablar de la resistencia eléctrica. Que es una magnitud aditiva cuando colocamos resistencias en serie y “no sería aditiva si las colocásemos en paralelo. Las resistencias en serie se adicionan, en paralelo no”. Como diría Francis Bacon, los libros deben seguir a las ciencias y no las ciencias a los libros.

Problemas armónicos

La media armónica es presentada en Rittaud (2002) de esta manera ¿Cuál es la relación entre unas colas de atención a clientes, un circuíto eléctrico y los acordes musicales? Respuesta: son tres tipos de problemas que se solucionan por la media armónica.

Pero es en *Viagem de Ida e Volta*, un precioso libro de Paulo Abrantes, donde se sugiere que esta media está en el trasfondo de la solución de problemas de viajes de automóviles, acordes, llenado de tanques, y otros muchos problemas – seis de los cuales proceden de un artículo de Usiskin en *Mathematical Teacher*. Es mas, este libro lo podriamos completar si incluyésemos problemas en los que la solución se calculase no con la media armónica sino con la suma armónica: “si un obrero hace una obra en 10 horas y otro en 8 horas, ¿en cuánto tiempo la realizan trabajando conjuntamente?”

Paulo nos describe en su libro como esta media armónica está en el centro de la resolución de numerosos problemas, pero además nos cuenta como la primera idea o solución de los alumnos es que la solución se calcula como una media.

Paulo, pues, afirma claramente que hay que enseñarles a los alumnos que toda esta colección de problemas tiene una estructura común que la percibe como una regla o una técnica que debe ser explicada después de presentar los distintos problemas. Quizás en sesiones del tipo “el problema de la semana”.

En este punto difiero de Paulo. Sugiero presentar sin ambajes, directamente, la noción de suma armónica, y por lo tanto de media armónica, para a continuación resolver como ejemplos todos los problemas en los que este tipo de suma o media son útiles. Porque se trata, como en el álgebra de resolución de ecuaciones de primer grado, de mecanizar una serie de procedimientos por los que llegamos a la solución “supón que la solución es x, llámalle x” y después emplear un procedimiento de cálculo de soluciones de ecuaciones. En este caso los pasos serían estos:

Analiza las magnitudes que intervienen: ¿Cuáles son las magnitudes fundamentales? ¿Hay magnitudes derivadas? La magnitud derivada, ¿es inversamente proporcional a una fundamental? ¿Hay que sumar o promediar magnitudes derivadas? Si la respuesta a todas estas preguntas es que si, resuelve el problema con la suma o la media armónica.

Desde luego, responde mejor a la idea intuitiva de los alumnos de que el problema es un problema de suma o media. Y bastaría con explicar detalladamente el origen de esta suma en uno -el primer- de los ejemplos.

Pero es que además todo lo dicho sugiere que es aplicable, con ciertos matices de detalle que habría que señalar y cuidar, en cada caso, a las magnitudes derivadas según una ley o función cualquiera. Después de leer estas líneas supongo que no será difícil responder a esta pregunta: si mezclo una cantidad igual de dos soluciones de pH 7 y 3, ¿cuál es el pH de la solución mezcla? Para responder inmediatamente, la media de pH, que no es cinco sino

$$pHm = -\log\left(\frac{10^{-7}+10^{-3}}{2}\right)$$

. O que la mezcla de 4 litros de pH 7 y 2 de pH 3 dan una solución de

$$pHm = -\log\left(\frac{4*10^{-7}+2*10^{-3}}{6}\right)$$

Ya que pH=-log([H^+]), se obtiene el resultado despejando las concentraciones, sumando y dividiendo por el número de litros total, pues es una concentración, pero aquí se propone “ver” el resultado de forma inmediata.

Otro ejemplo; sabiendo que M=0,67*log E-7,9, M es la magnitud en la escala de Richter y E es la energía liberada, si ocurren dos terremotos simultáneos en la misma zona, de magnitudes 5 y 4, ¿cuál es la magnitud del terremoto percibido como conjunto?. Respuesta inmediata,

$$MR = 0,67\log\left(10^{\left(\frac{4+7,9}{0,67}\right)}+10^{\left(\frac{5+7,9}{0,67}\right)}\right)-7,9 = 5,0092136$$

O la medida en decibelios de la suma de dos sonidos de valores 60 y 60 db

$$DB = 10\log\left(10^{\frac{60}{10}}+10^{\frac{60}{10}}\right) = 63$$

-Un resultado de triángulos se podría enunciar así: la altura de un triángulo sobre uno de sus lados es igual a la medida de ese lado por la *suma armónica* de las tangentes de los ángulos del triángulo formados por ese lado.

-En un álgebra de Boole, cualquiera de las operaciones puede ser definida en función de la otra y el complementario (la función f y su inversa aquí); así, a*b=(a’+b’)’, por las leyes de Morgan. En conjunto, estos ejemplos prueban que las aritméticas derivadas si que están en la secundaria.

Propiedades de la media aritmética

“La media está entre el mínimo y el máximo de los valores” que a veces se confunde por los alumnos en la propiedad de que la media está en el medio de los valores; lo cual es cierto si son 2 valores para los que se calcula la media o si es una distribución simétrica.

En Batanero (2002) se trata uno de los aspectos sobre los cuales podría derivarse todo el artículo: *de Como los alumnos entienden las medias*, y este es un de los temas que trata, entre otros aspectos clarificadores del concepto de media. Se ven 5 tipos de problemas de los que la resolución desvela si comprendemos o no la media aritmética en toda su amplitud.

Ideas y preguntas que no trata ese artículo y que poderían ser interesantes son:

1- ¿Que es lo que hace a la media aritmética tan intuitiva y natural para la mayor parte de los alumnos?

2.-La media es una función homogénea y simétrica de los valores. Que además es invariante a la simetría o giros de centro la media, a las translaciones en el sentido de que la media de los puntos trasladados es la media trasladada, y a las homotecias (en el mismo sentido que las translaciones). Estas propiedades geométricas, ¿podrían usarse para un mejor aprendizaje de las propiedades de la media por los alumnos, mediante visualizaciones? ¿Es importante la propiedad de la media señalada en *Suma de distancias ao cadrado* de Rovira (2002), dado su componente geométrico?

Entender u ofuscar

Contaba Enrique Vidal, en las Jornadas de Debate de AGAPEMA en Santiago en el 2002, que uno de nuestros compañeros de estudios en la Facultad definía hacer matemáticas como hacer algo que no se entiende. O sea, que se hacen matemáticas cuando lo que se hace no se entiende. O que uno no hace matemáticas si lo que hace se entiende. Que tiene tres interpretaciones, la benévola, que sería que puesto que estamos en la frontera de nuestros conocimientos, estamos resolviendo auténticos problemas, pero para lo que estamos haciendo no logramos –de momento– justificación, por que lo estamos haciendo a modo de exploración, sin una fuerte justificación. La interpretación literal: se hacen matemáticas cuando formamos parte de un grupo de personas que está haciendo cosas nuevas pero ninguna de ellas sabe o entiende lo que está haciendo ni se tiene perspectiva de para qué sirve. Y una interpretación malévola: se trata de ofuscar lo que se escribe para que no haya nadie con capacidad de reconocer las trivialidades "cocotológicas" que contiene (ver Pasatiempos, en este mismo número).

Contra esta interpretación se levantaría hasta el mismísimo Pitágoras, el definidor de "matemáticas": para el, matemáticas era lo que se aprende, por lo tanto lo que se entiende; o sea, el conjunto de herramientas lógico-deductivas que nos ayudan o permiten entender el mundo.

Para un griego todo aquello que no sirviese para entender mejor el mundo no serían matemáticas. Todo aquello que no aportase luz y claridad, entendimiento, a una situación física o matemática no sería más que una pérdida de tiempo, desde luego no digna de aprenderse y, por lo tanto, de ser matemáticas. Un último argumento a favor de la necesidad de claridad y entendimiento de las matemáticas, lo da la ley de la inutilidad de las pruebas complejas de Vladik Kreinovich y Luc Longpré: demostraron (Delhaye 2002) que si un resultado es potencialmente útil, no es posible que tenga una prueba compleja.

Es por esto que en este artículo se trata de hacer matemáticas del mas alto nivel, de las que se entienden y casi cualquiera puede entender perfectamente. Admitiendo que haya personas que tengan la opinión contraria.

Todos sabemos una serie de resultados sobre distintas clases de medias: aritmética, geométrica, armónica, cuadrática, de raíz enésima. Sabemos que existe una relación de orden entre ellas $H \leq G \leq \overline{X} \leq C$, *y* podemos demostrar algunos resultados mas sobre ellas.

Pero lo que se pretende demostrar o mostrar en este artículo es la contestación a estas preguntas: ¿De donde vienen y que significan esas medias? ¿Por que son medias, por que funcionan tan bien como medias?. ¿Que otro tipo de medias podemos presentar, por lo tanto? ¿Nos ayuda a entender la aritmética de 2+2=5, la suma de velocidades relativística?

¿Nos ayuda a entender?

Empezaremos por la última pregunta.

Entendamos la media cuadrática $m_2 = \sqrt{\dfrac{l_1^2 + l_2^2}{2}}$

, y para esto planteamos la situación siguiente:

Tenemos dos cuadrados A_1 y A_2 de lados l_1 y l_2, y nos preguntamos por la existencia de un cuadrado media de los dos propuestos inicialmente (podrían ser *n* en vez de 2, pero eso no mejora el razonamiento y complica la notación).

Y ahora es cuando tomamos la decisión fundamental: ¿como hacemos el cuadrado media, tomando un cuadrado de lado la media de los lados o tomando un cuadrado que tuviese de área la media de las áreas de los cuadrados? Si tomamos la primera opción el cuadrado media tiene de área

$$A_m = \frac{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2}{4} = \frac{(l_1 + l_2)^2}{4}$$

que si, evidentemente, es una área media a los dos cuadrados originales, pero si tomamos la segunda opción aún es mas natural -nos suena más y es la media aritmética de su medida natural, de sus áreas- la media que usamos- en este caso

$$A_m = \frac{A_1 + A_2}{2}$$ el área media es la media aritmética de las áreas que intervienen.

A continuación nos preguntaremos cuánto vale el lado de ese cuadrado de área media "natural".

Y haremos el siguiente razonamiento elemental:

$$\frac{A_1}{l_1^2} = \ldots = \frac{A_n}{l_n^2} = \frac{A_1 + \ldots + A_n}{l_1^2 + \ldots + l_n^2} = \frac{(A_1 + \ldots + A_n)/n}{(l_1^2 + \ldots + l_n^2)/n} = \frac{A_m}{l^2}$$

de donde $$l = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}{n}}$$

el cuadrado de área natural media tiene de lado la media cuadrática de los lados de los cuadrados. Es una media porque se refire a la propiedad característica fundamental de un cuadrado, su lado, y tomamos la media aritmética de su medida fundamental, de sus áreas.

Si repetimos el razonamiento para n cubos, llegaríamos a la conclusión de que el cubo medio tiene de lado la media cúbica de los lados de los cubos.

$$l = \sqrt[3]{\frac{l_1^3 + l_2^3 + \ldots + l_n^3}{n}}$$

Para una serie de hipercubos en R^4 el hipercubo medio tendrá de lado $$l = \sqrt[4]{\frac{l_1^4 + l_2^4 + \ldots + l_n^4}{n}}$$
,etc, etc...

al mismo resultado podríamos llegar si la media es la geométrica o la armónica, pero la vamos a pensar de modo general:

Sea un fenómeno natural, o un objeto matemático con dos medidas sobre dos aspectos relevantes del objeto o ente que se quiere estudiar. Una medida mas relevante M y una medida menos relevante m relacionadas de la forma $M=kf(m)$ donde f es una función con inversa f^{-1}. También podemos presentarlo así: un objeto con una medida accesible, medible, m y con una propiedad derivada, $M=kf(m)$, de la que sólo podemos tener medidas indirectas. Queremos definir la media de m *a* través de la de M.

Si tenemos n objetos o entes con medidas $M_1, M_2, \ldots M_n$. De aquí

$$\frac{M_1}{f(m_1)} = \frac{M_2}{f(m_2)} = \ldots = \frac{M_n}{f(m_n)} =$$

$$\frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n)} =$$

$$\frac{(M_1 + M_2 + \ldots + M_n)/n}{(f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n))/n} = \frac{M_{media}}{f(m)}$$ de donde **;**

$$f(m) = (f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n))/n$$

$$m = f^{-1}((f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n))/n)$$

o sea, que es la medida segunda del objeto medio, del que viene definido por la media aritmética de los n valores de su medida principal, M. En los ejemplos anteriores $f(x)=x^2$; $f(x)=x^3$,...

Elaboremos un ejemplo algo mas complicado: supongamos esferas de igual radio compuestas por varias substancias de densidad d_i menor que 1 y que por lo tanto flotan en el agua. Consideremos el área del círculo que es visible por encima del agua como medida principal M_i del objeto i y d_i como medida secundaria. Así $M_i=f(d_i)$; podríamos calcular la densidad d de la esfera que presentase un área media por encima del agua y esta se calcularía por la fórmula de la "media" correspondiente al problema. ,

Entendiendo la definición de suma de magnitudes derivadas

Pero también estaremos entendiendo los isomorfismos de R que se contaban en el artículo 2+2=5.

Volvemos al punto en el que tenemos dos cuadrados A_1 y A_2 de lados l_1 y l_2 y buscamos una suma distinta para l_1 y l_2 isomorfa a la suma normal de R.

Definimos la suma de l_1 y l_2 como el lado del cuadrado de área la suma de las áreas de los cuadrados de lados l_1 y l_2. Así, estamos definiendo la operación

$$l_1 \Delta l_2 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$$

O, en otros casos, $$l_1 \Delta l_2 = f^{-1}(f(l_1) + f(l_2))$$

Y ahora reescribiremos: Sea un fenómeno natural, o un objeto matemático con dos medidas sobre dos aspectos relevantes del objeto o ente que se quiere estudiar. Una medida mas relevante M (puesto que queremos preservar su aritmética) y una medida menos relevante m relacionadas de la forma $M=kf(m)$ donde f es una función con inversa f^{-1}. Definimos la operación suma sobre la medida m la través de la medida M como

$. m_1 \Delta m_2 = f^{-1}(f(m_1) + f(m_2))$

Por ejemplo, uΔv=tanh(arctanh(u/c)+arctanh(v/c)).c=

$$\frac{(\tanh(\text{arctanh(u/c)}) + \tanh(\text{arctanh(v/c)})).\text{c}}{1 + \tanh(\text{arctanh(u/c)}).\tanh(\text{arctanh(v/c)})} = \frac{u+v}{1+\frac{u.v}{c^2}}$$

en la velocidad de la luz siendo f(u)= arctanh(u/c) y tratamos de preservar *c* como velocidad máxima, como medida máxima de velocidades; *f(u)* es la medida de la que se preserva la aritmética, más relevante de la velocidad *u*, mientras que el propio valor de *u* es menos relevante (no se conserva la aritmética), contra la idea habitual. Dicho de otro modo, parece ser que la velocidad es una medida derivada, que sólo podemos calcular arctanh(u/c) (en realidad, cuando u es pequeña las dos medidas son practicamente las mismas) y de ahí definir la suma de velocidades.

Pero seguimos con las medias

Teorema 1. la media

$$m = f^{-1}((f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n))/n)$$

tiene las propiedades siguientes:

La “suma” de las “desviaciones” de cada valor a la media es “nula”.

La **‘** es una indicación de que las operaciones suma, resta, etc, no son las habituales, sino las derivadas.

$$\sum{}'m_i -{}'m = \sum{}' f^{-1}(f(m_i)) - f^{-1}((f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n))/n) =$$
$$f^{-1}((f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n)) - (f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n))) = f^{-1}(0)$$

Ejemplo trivial. La media geométrica m cumple $m/m_1...m/m_n=1$.

2) La media de los “productos” de las “desviaciones” a la media “por” si mismas se hace mínima para la media y es igual a la obtenida tomando la media del producto de las “desviaciones” a un valor cualquiera x, menos el “producto” de la desviación de x a la media por si mismo (si $f^{-1}(0)=0$).

Como indicación, la media hace mínimo el valor de

$$\sum{}'(m_i -{}'m)^{2'} = \sum{}' f^{-1}((f(m_i) - (f(m_1) + f(m_2) + ... + f(m_n))/n)^2) = ...$$

Los puntos suspensivos aquí indican que en realidad seguiriamos la demostración habitual (no derivando, que también, si no utilizando que $\Sigma(x-x_i)^2=\Sigma(x-m)^2+\Sigma(m-x_i)^2$, para un x fijo), pero teniendo en cuenta que lo hacemos para una definición de suma y multiplicación derivada. Por ejemplo, la media geométrica hace mínimo el valor de

$$I = \sum \ln^2\left(\frac{m}{m_i}\right)$$

La expresión I sale de transformar $\sum (m_i - m)^2$ teniendo en cuenta que la suma se convierte en un producto, la resta en un cociente y la multiplicación x.y en x^ln(y)=y^ln(x) cuando f(x)=ln(x), que es la función que convierte (o relaciona) la media geométrica en aritmética. Además, tomamos el logaritmo neperiano de ese producto para poderlo derivar. es decir

$$\ln\left(\prod\left(\frac{m}{m_i}\right)^{\ln\left(\frac{m}{m_i}\right)}\right) = \sum \ln^2\left(\frac{m}{m_i}\right)$$

Lo vamos a demostrar, para un mayor convencimiento,

Derivamos respecto a *m* la expresión

$$\frac{dI}{dm} = \sum 2.\ln\left(\frac{m}{m_i}\right)\left(\frac{m_i}{m}\right) * \frac{1}{m_i} = \frac{2}{m}\sum \ln\left(\frac{m}{m_i}\right) = 0$$

Y igualamos a cero para calcular el mínimo.

De donde

$$\ln\prod\frac{m}{m_i} = 0 \;\Rightarrow \prod\frac{m}{m_i} = 1 \Rightarrow m^n = \prod m_i$$

o sea, que la media geométrica anula la derivada de I, y, además al substituirla en la derivada segunda de I da un número positivo por lo que es un mínimo.

Por último, estos ejemplos sugieren que una mejor comprensión y familiaridad con las magnitudes derivadas puede ayudarnos a predecir resultados, a tener un cierto “metaconocimiento” que puede dar cierta ventaja en la resolución de ciertos tipos de problemas. Esta ventaja la enunciaré como **Metateorema**: Escoge el enunciado de algún teorema apropiado para la aritmética de +,x habitual (preferiblemente de funciones reales), transfórmalo en un enunciado de una aritmética derivada y (salvo cambios naturales) tendrás un nuevo teorema cierto.

Una explicación *currente calamo* puede hacerse así: Creamos un isomorfismo de R en R, con operaciones distintas; cualquier enunciado en el R ordinario, mediante el isomorfismo se transforma en un "enunciado" de R con las otras operaciones. Si todos los pasos de las operaciones de demostración del primer enunciado podemos substituirlos por pasos equivalentes en la demostración del segundo, luego es posible demostrar el segundo.

Un camino que nos permitirá llegar a nuevos teoremas, seguramente triviales.

Invitamos al atento lector a descubrir algunos de ellos que sean interesantes. Como ejemplo para animar, además del ya citado de la media geométrica presento el siguiente, apropiado sólo para los aficionados al Derive :

Definamos el $$\lim_{h\to 1}\left(\frac{f(xh)}{f(x)}\right)^{1/\ln h}$$

(que sería la transformación de la definición de derivada por la función ln(x)). A simple vista ya se puede ver que esta cumple que D'(f.g)=D'f.D'g, como era previsible, pero además, utilizando Derive podemos comprobar que D'f'=e^(Df)[ln(x)], siempre que sepamos transformar *f* en *f'*, claro. Por ejemplo, f(x)=x^n se transforma en f'(x)=e^(ln(x))^n.

En general, estas derivadas "derivadas" se definen D'g(x)=lim (g(x+'h)-'g(x))/'h cuando *h* tiende a $f^{-1}(0)$ y tienen reglas como D'g'= f^{-1}(D(g))[f(x)] y que D'(pΔq)=D'pΔD'q.

¿Qué significa sen(x) en la aritmética derivada, y como se traduce sen(x) a una función equivalente en la aritmética derivada? ¿Qué pasa con las ecuaciones diferenciales, series de Taylor, integrales, todo el análisis "derivado", con su significado físico? ¿Cómo mejora la comprensión del concepto de derivada? ¿Qué significa *D'f=0*? ¿Hay algún problema mas fácilmente resoluble en una aritmética derivada? Miles de preguntas surgen de un sólo ejemplo.

En el fondo, un complicado juego de transformaciones de variable, pero que recobra su valor al pensar en lo que nos cuesta adaptarnos al cambio al euro.

Bibliografía:

Abrantes, Paulo (1988), *Viagem de ida e volta*. Lisboa : APM.

Antibi, André (1988), "Une suggestion pour combattre la 'constante macabre' ", en *Thèse*, IREM de Toulouse.

Antibi, André (2005) "La Constante Macabra o como se ha desmotivado a muchos estudiantes". Editorial: El rompecabezas. Madrid.

Batanero, Carmen. (2000), "Dificultades de los Estudiantes en los Conceptos Estadísticos Elementales: el Caso de las Medidas de Posición Central", en *Ensino e Aprendizagem de la Estatística.*Editado por la SPE, APM y la Universidad de Lisboa. Lisboa.

Calvo Rovira, J. Díaz Regueiro, M.(2002), "Suma de distancias ó cuadrado", en *Gamma* nº 2, pp. 53-54.

Delhaye, Jean-Paul (2002), *L'intelligence et le calcul* . Baume-les-Dames.: Belin Pour la Science.

Díaz Regueiro, Manuel (2001), "Dous mas dous son cinco ". *Gamma* nº 1, pp. 53-55.

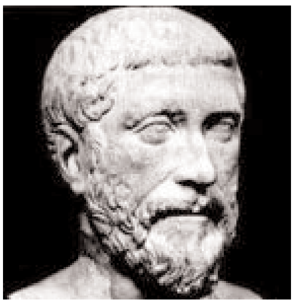
Hardie,C. D. (1942) *Truth and Fallacy in Educational Theory.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hardy, Littelwood, Polya. (1951), *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.

Machado, Nilson José (2002), *Matemática e Educação*. São Paulo: Cortez Editora.

Mosterín, Jesús (1978), "La estructura de los conceptos científicos", en *Investigación y Ciencia* nº 16 y en *Conceptos y teorías en la ciencia* (1984).

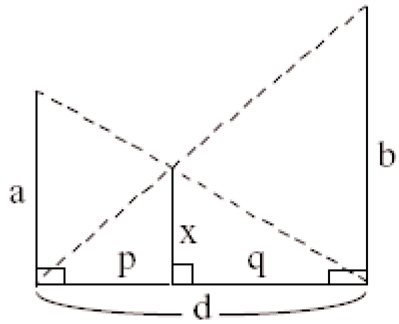
Rittaud, Benoit. (2002), "La moyenne armonique",. pp 12-13 de *Tangente nº11 (Maths & Musique).* Argenteuil.



Pitágoras (Samos, 582 - 500 a.C.) identificó tres tipos de medias: aritmética, geométrica y armónica.

Complementos

Hay numerosos ejemplos de suma armónica que es posible describir y que no están incluidos en el texto. Así en este dibujo x es la suma armónica de *a* y *b*.

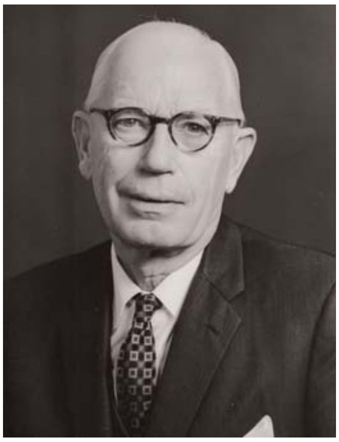


En Nelsen (2002), se pueden ver otras configuraciones geométricas para distintas medias.

En óptica, los ejemplos de suma armónica también son frecuentes: Lentes delgadas en contacto con longitud focal f_1 y f_2 tienen como longitud focal combinada la suma armónica de f_1 y f_2.

Las lentes delgadas cumplen que la longitud focal es la suma armónica de las distancias objeto e imagen. La ecuación de los espejos dice que la longitud focal es la suma armónica de las distancias objeto e imagen, etc,....

NELSEN, R.B. (2002): *Demostraciones sin palabras. Ejercicios de pensamiento visual,* Proyecto Sur, Granada.



Profesor Charles Hardie (Glasgow 1911, Hobart 2002)

Profesor Paulo Abrantes (Lisboa 1953-2003)

Arquitas de Tarento (450 a.C.-350 a.C)
Le dió el nombre a la media armónica.