γ 4 GAMMA setembro 2004

Entender o método de Newton

Manuel Díaz Regueiro

No método de Newton o obxectivo é resolver unha ecuación f(x)=0. A idea máis simple do mundo que a un se lle pode ocorrer é expresalo $x=f^{-1}(0)$, e xa está resolta. De feito que cando f é unha función de inversa coñecida a solución aparece na Secundaria e suspendemos aos nosos alumnos se non saben resolver *ln* x=0 ou *cos* x=0. Con toda xustificación.

O que ven a continuación ten unha traducción e un resumo visual: no método de Newton tomamos a recta tanxente á función nun punto próximo á solución e calculamos o punto de corte desa tanxente co eixe das X. Pois ben, a imaxe que imos ver a continuación é a da curva de orde superior deducida da serie de Taylor da función nun punto próximo á solución e o cálculo do punto de corte desa curva co eixe das X. Isto é posible velo tanto na función orixinal-*o que é moito máis complexo de resolver*- como *na función inversa*, neste caso aplicado a $y=f^{-1}(x)$ nun *x* próximo a cero, tratando de determinar agora o corte da curva tanxente co eixe das Y.

Pensar na inversa, decía Jacobi, entusiasmado polo que esta idea –pensar na inversa da función- lle rentou nas integrais elípticas. Pensar na inversa e pensar de modo simple, poderiamos engadir.

A serie de potencias da función inversa.

A veces, certos resultados como o de Lagrange da fórmula da inversa interfiren e impiden ver matemáticas simples desde un punto simple. Cando escribín o artigo *Series de potencias de una función* tiña certos receos que cousas tan simples non estiveran escritas previamente. Mirando en Internet hoxe en día cando un busca serie de potencias dunha función inversa atopa o teorema de Lagrange- Bürmann, en variable complexa, e con restos complexos, pero segue sen estar explicado-coñecido-divulgado para unha función real de variable real. É dicir, ninguén leu o citado artigo, excepto quizáis a persoa que o referenciou no *Mathematical Reviews*.

Cal sería esa serie de potencias se extendese unhas liñas máis ese artigo citado?

Partindo da *serie de potencias dunha función* en Regueiro (1982):

$f(x)=f(a)+\mathcal{F}(f)(a)(p(x)-p(a))+$

$\mathcal{F}^2(f)(a)(p(x)-p(a))^2/2!+\ldots..+\mathcal{F}^n(f)(a)(p(x)-p(a))^n/n!+\mathcal{F}^{n+1}(f)(c)(p(x)-p(a))^{n+1}/(n+1)!$

Onde $\mathcal{F}=1/p'(x)D$. E unha das posibles fórmulas do resto, sendo *c* un punto intermedio entre *a* e *x* dá:

$$\frac{\mathcal{F}^{\,n+1}(f)(c)(p(x)-p(a))^{n+1}}{(n+1)!}$$

Se y=f(x) é a función, $y_0=f(x_0)$, a función inversa ten de serie de potencias $\mathbf{x=x_0+\mathcal{F}(x)[x_0](y-y_0)+\mathcal{F}^2(x)[x_0]\ (y-y_0)^2/2!+\ \mathcal{F}^3(x)[x_0](y-y_0)^3/3!+\ldots..+\mathcal{F}^n(x)[x_0](y-y_0)^n/n!+\ldots..}$ onde $\mathcal{F}$ é un operador diferencial $\mathcal{F}=1/f'(x)D$, xa que estamos expresando x como serie de potencias de $f(x)-f(x_0)$.

Coincide coa serie da fórmula de Lagrange, fórmula 3.6.6 do *Handbook* que di que se y=f(x), $y0=f(x_0)$, $f'(x_0)\neq 0$

$$x=x_0+\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(y-y_0)^k}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{x-x_0}{f(x)-y_0}\right)^k\right]_{x=x_0}$$

Xa que a serie debe ser única,

$$\left[\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{x-x_0}{f(x)-y_0}\right)^k\right]_{x=x_0}=F^k(x)[x_0]=\left[\left(\frac{1}{f'(x)}D\right)^k(x)\right][x_0]$$

(que como se pode comprobar para k=1 ou k=2, é certo só tomando o límite da expresión da esquerda cando x tende a x_0); límite que fai sumamente complexo o cálculo dos coeficientes e explica que o que ven a continuación non estea contado xa desde os tempos de Lagrange. A complexidade da fórmula da inversa de Lagrange- explica que a súa relación co método de Newton non haxa sido suficientemente expresada ou coñecida. Naturalmente, postos a escoller, prefiro a miña que é máis operacional, simple, e clara- para min. Ademais de máis simple de calcular e probar- non máis ca serie de Taylor. Ten resto e podemos tirar conclusións e resultados notables dela.

Tamén aparece a serie inversa noutro lugar do *Handbook of Mathematical Functions,* (3.6.25) pero como tales coeficientes da serie inversa, aos que se pode chegar resolvendo o sistema de ecuacións resultante de substituír na serie de Taylor da función unha serie de potencias -con coeficientes a calcular-que dea por resultado x, é dicir, utilizando que $f(f^{-1}(x))=x$. O resultado é complexo e inintelixible, porque non se sabe de onde proceden eses coeficientes de expresión cada vez máis complicada con *n*. Pero estabamos co método de Newton e imos ver que ten que ver a fórmula do desenvolvemento en serie da inversa con este método. O que nos interesa neste artigo é iluminar se isto nos serve para entender mellor o método de Newton.

Podemos ler en Internet como “The first attempt to use the second order expansion is due to the astronomer E. Halley (1656-1743) in 1694. “. Halley chega ao segundo membro da serie, e nesa mesma páxina se poden ver os métodos de Householder (1970), sen que haxa unha explicación sinxela deles. Mathworld explica a “Halley’s Irrational Formula” mediante a intersección -co eixe das X- da aproximación de Taylor de segundo orde explicada. De feito, ao facela así temos que resolver unha ecuación de segundo grao e aparece unha raíz cadrada, que xa non aparece na explicación do *Householder’s Method.*

Tratemos de buscar esa explicación sinxela.

$\mathcal{F}(x)=1/f'(x)*1=1/f'(x)$, $\mathcal{F}^2(x)=-f''(x)/(f'(x))^3$, etc...

Se agora y=0 –xa que para o *x* que estamos a buscar, solución da ecuación, debe ser y=f(x)=0, temos que

$$\mathbf{x=x_0-f(x_0)/f'(x_0)+f(x_0)^2(-f''(x_0)f'(x_0)/(f'(x_0))^3)/2+....}$$

Voila!. Ou **Eureka!**. Xa que:

-Os dous primeiros termos da solución expresada con esta serie son os os da fórmula do método de Newton. Os tres primeiros son os de Halley-Householder. Agora si xa sabemos un novo porqué da efectividade do método de Newton.

-Polo tanto para xeneralizar o método de Newton só temos que ir engadindo ao método iterativo máis sumandos da fórmula da inversa aplicada a este caso no que y=0:

$$\mathbf{x=x_0+\mathcal{F}(x)[x_0](-y_0)+\ \mathcal{F}^2(x)[x_0]\ (-y_0)^2/2!+\mathcal{F}^3(x)[x_0](-y_0)^3/3!+.....+\mathcal{F}^n(x)[x_0](-y_0)^n/n!+.....}$$

En Internet podemos ver outros métodos de xeneralizar o método de Newton, pero con orientacións totalmente diferentes das que se presenta aquí.

-Se utilizamos todos os termos temos un método directo, non iterativo, do cálculo da solución buscada. Teoricamente é posible calculala con calquera precisión, a costa da maior complexidade dos termos sucesivos. Isto hoxe en día non é tan problemático ao dispoñer de ferramentas informáticas de cálculo simbólico.

-Pódese xeneralizar perfectamente a varias variables, aínda que non imos aquí encher de fórmulas este pequeno artigo con algo que pode reproducir calquera matemático. O método de Newton é un método central neste caso. Buscariamos puntos óptimos –por poñer un exemplo- non pola dirección do maior gradiente, senón pola dirección de maior gradiente da superficie tanxente de 2º, 3º ... grao. Iriamos máis directos á solución o que en problemas extremadamente complexos de economía ou bioinformática pode ser moito máis satisfactorio e eficiente.

-Melloran os métodos de Householder.

-Pero o resultado máis notable (en canto a entender a eficiencia dos métodos de Newton xeneralizados utilizando a inversa) é o seguinte- notablemente simple e rápido de demostrar na súa versión xeral.

Teorema $\|\varepsilon_k\| \le K\|\varepsilon_{k-1}\|^{n+1}$. Sendo ε_k o erro cometido pola iteración de orden *k* do método de Newton de orde *n*. É dicir, en cada paso da iteración diminuímos o erro do resultado, sendo este proporcional a unha potencia n+1 do erro da iteración anterior.

Os detalles:

Sexa $g(x)=x+\mathcal{F}(x)(-f(x))+\ \mathcal{F}^2(x)(-f(x))^2/2+\mathcal{F}^3(x)(-f(x))^3/3!+....+\ \mathcal{F}^n(x)(-f(x))^n/n!$ a función iterativa do método de Newton pola aproximación n-sima da inversa. Sexa *a* a solución de f(x)=0 que buscamos, é dicir, f(a)=0 e g(x) cumple as condicións do teorema de Cauchy en [a,x], esencialmente que $f \in C^{n+1}[a, x]$. E $\mathcal{F}^{n+1}(x)$ está acotada entre *a* e *x*. E f'(x) tamén, ademais de non anularse en [a,x].

Así $x_k=g(x_{k-1})$ e a tese é que $|x_k-a| \leq K |x_{k-1}-a|^{n+1}$

Demostración.

Polo teorema de Cauchy

$$\frac{g(x)-g(a)}{f(x)-f(a)}=\frac{g'(c)}{f'(c)}$$

sendo *c* un punto intermedio a *a* e *x*. f(a)=0 e g(a)=a por ser *a* solución de f(x)=0.

$f(x)-f(a)=f'(c_1)(x-a)$ polo teorema do valor medio. E $g'(c)/f'(c)= \mathcal{F}(g(x))[c]$.

Polo que calculamos $\mathcal{F}(g(x))= \mathcal{F}(x)+ \mathcal{F}^2(x)(-f(x))+ \mathcal{F}(x)(-1)+ \mathcal{F}^3(x)(-f(x))^2/2+\mathcal{F}^2(x)f(x)+\mathcal{F}^4(x)(-f(x))^3/3!- \mathcal{F}^3(x)f(x)^2/2....+ \mathcal{F}^{n+1}(x)(-f(x))^n/n!= \mathcal{F}^{n+1}(x)(-f(x))^n/n!$ Pois os demás sumandos anúlanse dous a dous(como nunha suma telescópica).

Polo que

$$g(x)-g(a)=\left[\frac{\mathcal{F}^{n+1}(x)(-f(x))^n}{n!}\right][c](f(x)-f(a))$$

$$=\left[\frac{\mathcal{F}^{n+1}(c)}{n!}\right](f(a)-f(c))^n(f(x)-f(a))=$$

$$=(-1)^n\left[\frac{\mathcal{F}^{n+1}(c)}{n!}\right](f(c)-f(a))^n(f(x)-f(a))$$

Aplicando agora o feito que $\mathcal{F}^{n+1}(x)$ está acotada entre *a* e *x* por K_1. E que f'(x) o está por K_2, aplicando o teorema do valor medio a f(c)-f(a) e a f(x)-f(a) chegamos a que

$$\|g(x)-g(a)\| \leq \frac{K_1 K_2^{n+1}}{n!}\|x-a\|^{n+1}$$ polo que

$$\|g(x_{k-1})-g(a)\| \leq K\|x_{k-1}-a\|^{n+1}$$ é dicir

$$\|x_k-a\| \leq K\|x_{k-1}-a\|^{n+1}$$

c.q.d.

Demostrar isto para n=1 utilizando Taylor é case tan complexo como esta demostración. Utilizar a fórmula de Lagrange da inversa para isto é pouco menos que imposible.

E, para finalizar, unha aplicación ao cálculo de raíces supereficiente.

Dado f(x)=0, tomemos un valor ε pequeno; temos que f(x)+ ε=ε. Entón chamando g(x)=f(x)+ ε, a solución é $x=g^{-1}(\varepsilon)$. Se coñecemos un x_0 tal que $g^{-1}(x_0)=0$, ou ben -simplemente-próximo á raíz buscada x, podemos facer o desenvolvemento en serie da inversa, de g^{-1},en x_0, e calculala con $x=g^{-1}(\varepsilon)$.

Un exemplo o aclarará. Calculemos unha raíz de $x^{27}-2x+1{,}01=0$. $g(x)= x^{27}-2x+1$ e g(1)=0. O desenvolvemento da inversa de g en 1 é:

x=1 + 1/25·y - 351/15625·y^2 + 173277/9765625·y^3- 19770426/1220703125y^4+ 61188852114/ 3814697265625 y^5

Cos seis sumandos e y= -0,01 temos que x = 0.999597735692658817042879124732878684023730781096015520463438487786261689341308606111979506086943475769904816200843348526859347206607261574006786920877705086815013741686303228522696052277481731668140 38..., que dá unha precisión de máis de 300 decimais, comprobado con Derive. Sen embargo hai que resaltar que cun termo menos só aproximaba 11 decimais!. A conclusión, Derive utiliza a serie ata o quinto termo, ou algo pasa que merece unha atención detallada.

Os coeficientes saen de $1/(27x^{26}-2)$ [1]=1/25

$(1/(27x^{26}-2)D(1/(27x^{26}-2)D](x)[1]/2=$ -351/15625, etc, etc.

Dicir, por último, que estas series permiten calcular tablas de funcións inversas de alta precisión. Ou valores numéricos. ¿Algún se atreve co número de ouro?.

Bibliografía.

Manuel Díaz Regueiro (1982). Series de potencias de una función en *Actas IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, Vol. I.* Universidad de Salamanca.

Newton's method and high order iterations en http://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/newton.html

Newton, (1664-1671), *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*

Abramowitz e Stegun (1972-décima edición). *Handbook of Matemátical functions*. Dover. New York.