γ 6
GAMMA
xuño 2006

REPENSANDO PARA CONSTRUÍR

Manuel Díaz Regueiro
IES Xoán Montes

Resumo
Repensar e revisar son factores decisivos na construción da ciencia, e tamén das matemáticas. Nesta liña, á parte de novas consideracións, reviso algúns artigos anteriores de GAMMA.

Abstract
To rethink and to revise are decisive factors in the construction of science, and also in the mathemathics. I check some previous articles of GAMMA.

ENTENDER OS MOSAICOS RETORTOS OU UNHA CLASE DE NON EDGE-TO-EDGE TILINGS

Segundo Khun, os conceptos científicos seguen uns patróns de paradigmas que cambian e evolucionan en certos momentos de crise dando lugar a novos paradigmas.

Para Popper as teorías científicas son meras hipóteses que están perpetuamente á espera de probas de falsación. En Matemáticas, coa excepción de Lakatos, non é moi habitual defender a preocupación por revisar ou repensar as teorías e os teoremas. Parece como se estas non tivesen un carácter histórico, cultural e gozasen dun carácter divino. Coñécense e estúdanse certas cousas e outras non, danse unhas definicións e non outras. Podemos ver, no exemplo que segue, que ocorrería se se dese a definición de mosaicos semirregulares e regulares que non esixise compartir os lados.

Falando dos mosaicos, Veloso (1998) di que "por estranho que pareça, este largo campo de investigaçâo, embora sobre un material que há millares de anos está disponível, apenas há relativamente pouco tempo começou a ser explorado pela comunidade matemática. Pode dizer-se que o primeiro tratado matemático sobre a teoría dos padroes e das pavimentaçoes é o livro de Grumbaum e de Shepard". Efectivamente aínda non é coñecido o número de pavimentacións 4-uniformes e que son 61 as 3-uniformes foi probado por Chavey en 1984. Dúas novas pavimentacións hexagonais foron descubertas por unha ama de casa afeccionada, Marjorie Rice, en 1977.

Pero imos falar de mosaicos *retortos*. Son un tipo de teselacións que habitualmente non se contan nos libros sobre mosaicos e aínda é mais descoñecida a súa relación cos mosaicos regulares e semirregulares. Hai unha certa ignorancia deles, tanto é así que Kinsey, no 1999 conta cales son as regras para atopar todas as teselacións semirregulares, e son as mesmas regras que descubriu o Rev. Mr Jones en 1785:

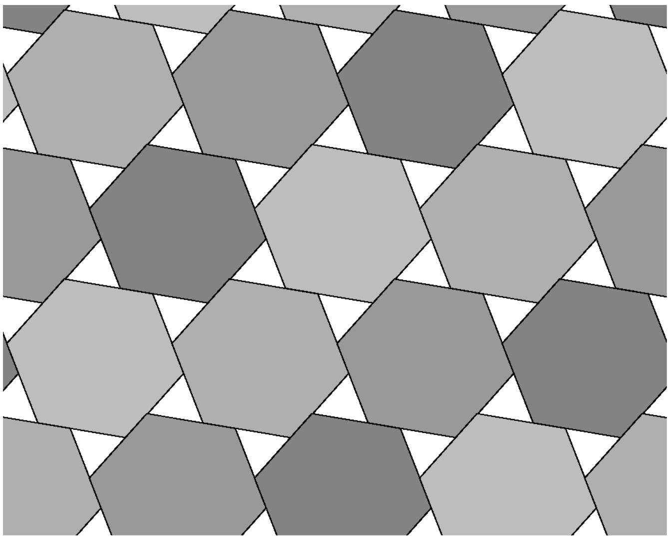
Regra 1: Os ángulos dos polígonos que se atopan nun vértice suman 360º. "Claramente", di Kinsey, debemos ter tres polígonos para xuntarse nun vértice. Así que,

Regra 2: Cada teselación regular e semirregular debe ter ao menos tres polígonos e non máis de 6 nun mesmo vértice.

Seguindo a definición de Mora "mosaico semirregular é o construído con combinacións de polígonos regulares, coa condición de que todos os vértices sexan iguais". Noutro momento sen embargo (actividades, páxina 17), di: A partir de agora, só vamos construír aqueles en que os lados comúns a dous polígonos coincidan completamente. Algo no que coincide con Veloso "Nao está incluido no nosso estudo, por tanto", di debaixo dunha imaxe de mosaico triangular (regular se non lle esixiramos compartir os lados).

Na definición de mosaicos semirregulares e uniformes está, xa que logo, (implícita ou explicitamente) que estes mosaicos teñen polígonos regulares que comparten lados totalmente, (*edge to edge* que diría un inglés). Aínda así, é conveniente e interesante saber que sen ese requisito admitiríanse máis solucións.

Como clasificariamos esta figura (ou a súa enantiomorfa)? O que afirmamos é relevante porque só a separa da semirregularidade o feito de que os polígonos da teselación non compartan os lados.



Poderíase facer o mesmo cuestionamento cando o lado do triángulo equilátero é maior co lado do hexágono, dando un mosaico no que o hexágono está envolto totalmente en triángulos. Estes tipos son dous dos mosaicos que chamo "retortos"(na bibliografía española só os atopei en Carlavilla que os usa en matemática recreativa, posto que dan configuracións útiles para certos problemas alxébricos e numéricos).

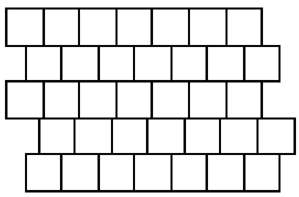
Por que non aparecen nas disquisicións alxébricas? (ver Mora, páx. 89, por exemplo, pero tamén Ghyka, páx 72) Porque se parte do feito que se xuntan 3, 4, 5 ou 6 polígonos regulares nun vértice, e non 2, seguindo ao Rev Mr. Jones...

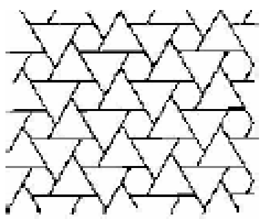
Así neste caso de 2 quedaría 1/n1+1/n2=1, (supoñendo, como é lóxico, que sumen 180º). Aparece este caso (n1=3, n2=6), o cadrado (n1=4, n2=4) e teríamos no caso de tres nun vértice de 180º (n1=n2=n3=3). Estes últimos corresponden a situacións ben coñecidas dos mosaicos de cadrados (os cadrados fan un mosaico aínda que non se coloquen 4 nun vértice) e mosaicos con triángulos equiláteros (tamén fan un mosaico aínda que non se coloquen seis nun vértice).

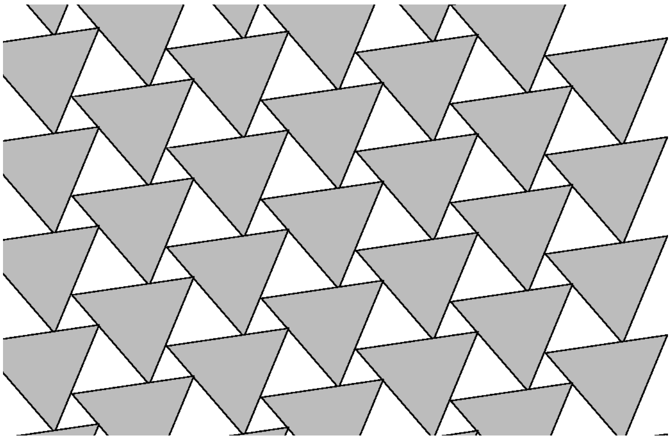
O que non está moi accesible na bibliografía é a a situación dos hexágonos e triángulos (ou a xeral) xa que só Grunbaum, a "biblia" dos mosaicos, páx. 74, dá un exemplo ou figura representativa de cada unha das 8 clases de teselacións uniformes que son *not edge-to-edge*, pero non dá a súa relación cos mosaicos semiregulares e regulares, a explicación de como se pode demostrar que non hai máis ou ver que se obteñen retorcendo ou desprazando franxas.

Williams na imaxe da páx. 42 aproxímase a idea final que quero transmitir: collamos os tres mosaicos regulares e fagámoslles movementos (xiros, translacións) e semellanzas (quizais mellor utilizando Cabri ou coa axuda doutro programa).

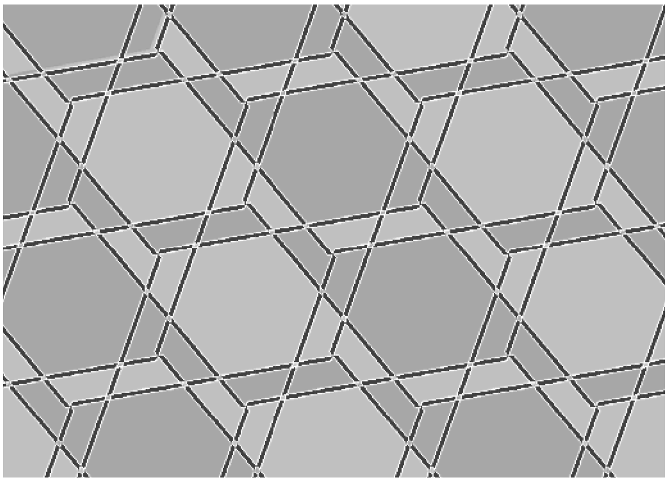
Cun pouco de tempo poderíamos establecer as condicións e a existencia destes mosaicos *retortos*.

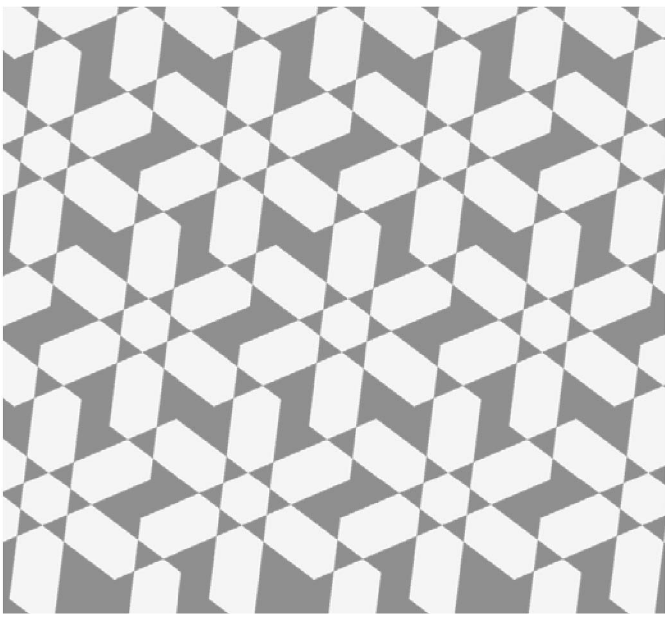






A conclusión á que chegamos é que facer as contas dun vértice con dous polígonos facilita entender, e dá a coñecer eses mosaicos tendo unha visión máis completa, ademais de anunciar toda unha pleiade de mosaicos de arte retorto. De feito, as imaxes mostradas –da miña autoría- son a orixe do comentario anterior.





REVISIÓN E COMPLEMENTO DE ARTIGOS ANTERIORES

En primeiro lugar, dicir que na páxina web http://www.allegue.com/artigos é posible atopar as versións revisadas dos meus artigos publicados en GAMMA. Non hai que dicir que serán benvidas todo tipo de rectificacións e aclaracións sobre eles.

Un enxeñeiro agrónomo arxentino, Ing. Miguel Ángel Amela, pregúntame pola bibliografía dos artigos *Esferas e medias* e *Suma de distancias ao cadrado* e despois aclara que:

Me llamaron poderosamente la atención, ya que Apostol y Mnatsakanian hacen mención a que no encontraron referencias en la literatura, pero; si no me equivoco respecto a la "partitura"… es la misma música…

Esferas e medias, Gamma, Septiembre 2001.-

Sums of squares of distances, Mathematical Horizons, Noviembre 2001.-

Suma de distancias al cuadrado, Gamma, Septiembre 2002.-

Sums of squares of distances in m-space, The Mathematical Association of America, Monthly 110, 2003.-

Aquí vén a conto mencionar que *Esferas e medias* ten máis de 20 anos polo que as datas son moito máis distanciadas do que pon Amela. Pero dubido que teñan relación entre eles. A verdade é que este método (poñelo na web) é un método máis efectivo para chegar ao grande público que publicalo nunha revista, tendo en conta que os lectores de revistas diminúen e os lectores de web aumentan. Así conta Amela como atopou os artigos..." *y he aquí que el domingo pasado antes de irme a dormir, me encuentro con sus trabajos. Si antes buscaba "<u>Sumas</u> de distancias al cuadrado" o "<u>Sumas</u> de cuadrados de distancias" no encontraba nada, pero bastó con buscar "<u>Suma</u> de…para encontrar su trabajo y de allí encontrar los otros, incluído "Esferas e medias"".*

Na páxina 37 de GAMMA 4, en *Entender o método de Newton,* no teorema da segunda columna hai unha elección desafortunada de *nome* da constante de maioración e índice pois escollo a mesma k, cando son cousas totalmente distintas e que non teñen nada que ver, así un enunciado máis comprensible sería:

$$\|\varepsilon_k\| \le C \|\varepsilon_{k-1}\|^{n}$$

onde C fai o papel de K (maiúscula) na demostración. Seguindo a idea do parágrafo anterior, este resultado ten data: 14 de abril de 1987... ou así pon a nota onde o escribín por primeira vez.

En *Áreas e triángulos, creando teoremas* de GAMMA 5 hai ao menos un erro (xa o anunciaba), na páxina 46 di que (k-paralelas m'=km) $R=(k^2+1)/k$, cando debería poñer $R=(k+1)^2/k$.

O teorema de Routh non é un erro pero si un esquecemento (ou un fallo de non repousar o suficiente o artigo, non buscar suficiente bibliografía e visións distintas que o sustentasen) pois pertence ao conxunto de teoremas dos que se estaba a falar e incluso son outra forma de ver algún deles, se ben, como é obvio teñen outro tipo de fundamentación que non é a mesma ca visión que se fai explícita no artigo. En Mathworld dise do **Teorema de Routh** (1896) que:

Se os lados dun triángulo están divididos nas razóns λ:1,μ:1,ν:1, as cevianas forman un triángulo central cuxa área é

$$A' = \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\lambda\mu + \lambda + 1)(\mu\nu + \mu + 1)(\nu\lambda + \nu + 1)} A$$

onde A é a área do triángulo orixinal, para $\lambda=\mu=\nu=n$,

$$A' = \frac{(n-1)^2}{(n^2+n+1)} A$$

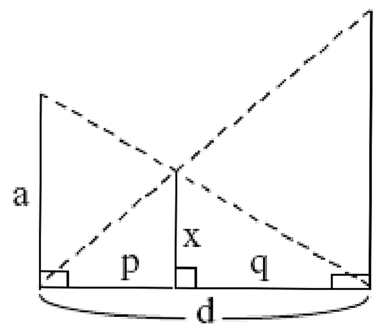
para n=1, 2, 3, ..., as áreas son 0, 1/7 (Steinhaus 1986, pp. 6-7, para ver unha demostración por congruencias dunha relación das que se fan no artigo), 4/13, 3/7, 16/31, 25/43, ... A área do triángulo formado conectando os puntos de división de cada lado é

$$A' = \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} A$$

Así que para os lectores interesados no tema xa teñen outra fonte de coñecemento para *áreas e triángulos*. En Coxeter (1971) faise unha demostración e explica a visión deste teorema como xeneralización dos teoremas de Menelao e Ceva e precisamente os demostra como casos particulares deste. Parece que ao menos Coxeter non considera trivial este tipo de teoremas... elementais, xa que lle dedica varias páxinas e exercicios nas 246-247 e 254 e 255. Penso que lendo a Coxeter queda suficientemente claro o obxectivo do artigo e o obxectivo do teorema de Routh son cousas totalmente distintas, aínda que concorden nalgún caso. Por certo que, segundo sinala Mercedes Sampayo, na introdución dese libro de Coxeter menciona a María Wonenburguer.

Convén aquí (referíndose a este artigo e a súa tese principal, os rapaces poden facelo se usan tecnoloxía) tamén lembrar o que dicía E. T. Bell "Aínda que a idea na que se basea é dunha sinxeleza infantil, o método da xeometría analítica é tan potente que un rapaz ordinario de dezasete anos pode servirse del para demostrar resultados que deixarían atónitos aos máis grandes xeómetras gregos: Euclides, Arquímedes e Apolonio". E o que dicía tamén Rósza Péter "No other field can offer, to such an extent as mathematics, the joy of discovery, which is perhaps the greatest human joy".

En *Entender as medias (2003)* habería que dedicarlle un máis amplo detalle aos numerosos exemplos de suma harmónica que é posible describir e que non están incluídos no artigo. Así neste debuxo x é a *suma harmónica* de a e b.



En Nelsen (2002), pódense ver outras configuracións xeométricas para distintas medias.

Este artigo obríganos a repensar que ocorrería se Arquitas cando deu o nome de harmónica á media, tivese definido a suma.

En óptica os exemplos de *suma harmónica* tamén son frecuentes: Lentes delgadas en contacto con lonxitude focal f_1 e f_2 teñen como lonxitude focal combinada a *suma harmónica* de f_1 e f_2. Lentes delgadas cumpren que a lonxitude focal é a suma harmónica das distancias obxecto e imaxe A ecuación dos espellos di que a lonxitude focal é a suma harmónica das distancias obxecto e imaxe...

Nese mesmo artigo, na páxina 51 de GAMMA 3, en *Entender as medias* é posible que moitos se despistaran con esta notación D'g'=f^{-1}(D(g))[f(x)], a notación corchete. O significado é que no lado da dereita, derivamos a función g. A ese resultado lle aplicamos f^{-1}. E no resultado final, substituímos x por f(x) (ese é o papel do corchete, indicar a substitución).

En *Generalizaciones a teoremas relativos a una función en un intervalo* que non está publicado en GAMMA, pero si estará en GAMMA DIXITAl nº 3 e tamén no enderezo web xa citado http://www.allegue.com/artigos. Nel podemos ver como, por unha banda, as regras da derivación múltiple con operador diferencial, sendo trivial, [F $^{(n-1}$(f)](x)=[D$^{(n-1}$(f)](p(x)) pode dar lugar a "novas e exóticas" fórmulas pero en si mesmo é unha fórmula curiosa tamén posto que relaciona ou iguala valores das derivadas e dos operadores diferenciais, pero en puntos distintos, un en x, e outro en p(x), un tipo de fórmula non usual, tampouco. Así que a primeira idea é que é un resultado trivial, fácil e curioso por non mencionado ou usado por ninguén. E usa a notación corchete aínda que xustamente neste artigo no sentido oposto ao citado en *Entendendo as medias*. En calquera caso que significa a notación corchete tal e como a emprego: que hai que facer as operacións indicadas antes de substituír o valor así en [F $^{(n-1}$(f)] aplicamos n-1 veces o operador 1/p´(x)D a f(x) e o resultado é igual a se derivaramos n-1 veces f(x) e o resultado o puxeramos substituíndo x por p(x). Así esta pequena expresión aplicada dá lugar a novas fórmulas como esta:

$$\frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sum_{l=0}^{\infty}(x-x_0)^l\,\frac{j_l\left(\sqrt{x_0}\right)}{(-2)^l\,x_0^{\frac{l}{2}}\,l!}$$

onde as j son as funcións de Bessel e moitas outras que expoño nese artigo.

Outra idea a salientar, incluso graficamente, é a xeneralización do teorema de Rolle e a cantidade de pequenos resultados, aínda que bastante "ad hoc", que xeneralizan resultados coñecidos. Así o problema do monxe que baixa unha montaña e se cruza con outro que sobe é unha variante e xeneralización do teorema de Rolle ou ao revés, posto que en realidade son equivalentes.

Entre eles salientaría o que demostra que unha media definida como en E*ntender as medias* ou en *Inequalities* de Hardy, ten ese carácter "central", como se definiría, un punto que está próximo a mediana dos n puntos dos que se calcula a media, ou no intervalo central de eses intervalos encaixados...

Corolario 4. Se p ten inversa a media

$$\alpha=p^{-1}\left(\frac{\sum p(a_i)}{n}\right)$$

é punto central aos puntos $a_1,...,a_n$.

En xeral, este artigo responde parcialmente á pregunta de que pasaría se Leibnitz e Newton definiran a derivada como Severi... aínda que isto merecería máis atención... outro día!

REFERENCIAS

APOSTOL, T.M. e MNATSAKANIAN, M.A. (2001): "Sums of squares of distances*", Mathematical Horizons*, Noviembre.

APOSTOL, T.M. e MNATSAKANIAN, M.A. (2003):

"Sums of squares of distances in m-space", *The Mathematical Association of America*, Monthly, 110.

BELL, E.T. (1937): *Men of mathematics*, Simon and Shuster, New York.

CARLAVILLA, J.L. e FERNÁNDEZ, M. (2000): *Construcciones y aplicaciones didácticas de los cuadrados mágicos II*, Proyecto Sur, Granada.

COXETER, H.S.M (1971): *Fundamentos de Geometría*, Limusa Wiley, México.

DAVIS, P.J. e HERSH, R. (1995): *A experiência matemática,* Editorial Gradiva, Lisboa.

DEVLIN, K. (2002): *Matemática, a ciencia dos padrões,* Porto Editora, Porto.

DÍAZ REGUEIRO, M. (1987): *Generalizaciones a teoremas relativos a una función en un intervalo.* Publicado por primeira vez en *GAMMA DIXITAL,*3, (2006).

DÍAZ REGUEIRO, M. (1987): "Entender o método de Newton..." Publicado por primeira vez en *GAMMA*, 4, 2004.

DÍAZ REGUEIRO, M. (2005): "Áreas e triángulos, creando teoremas", *GAMMA,* 5.

DÍAZ REGUEIRO, M. (2003): "Entender as medias", *GAMMA,* 3.

GRUNBAUM, B. e SHEPHARD, G.C. (1989): *Tilings and Patterns: an Introduction,* Freeman, New York.

GHYKA, M. (1977): *The geometry of art and life,* Dover, New York.

KINSEY, L.C. E MOORE, T.E. (1999): *Symmetry, Shape, and Space. An Introduction to Mathematics through Geometry*, Key College Publishing, Emeryville, CA.

MORA, J.A. e RODRIGO, J. (1993): *Mosaicos I*. Col. 2 Puntos, Proyecto Sur, Granada.

MORA, J.A. e RODRIGO, J. (1993): *Actividades*. Col. 2 Puntos, Proyecto Sur, Granada.

NELSEN, R.B. (2002): *Demostraciones sin palabras. Ejercicios de pensamiento visual,* Proyecto Sur, Granada.

PÉTER, R. (1992): "Mathematics is beautiful", *Mathematical Intelligencer,* 62.

STEINHAUS, H. (1986): *Instantáneas matemáticas*, Biblioteca científica Salvat, Barcelona.

VELOSO, E. (1998): *Geometría, Temas actuais*, Instituto de Innovaçao Educacional, Lisboa.

WELLS, D. (1998): *Dicionário de geometria curiosa*, Gradiva, Lisboa.

WILLIAMS, R. (1979): *The geometrical foundation of natural structure. A source book of design.* Dover. New York.

Offset Polygons en *http://library.thinkquest.org/16661/creating.other/offset.html*