GAMMA
setembro 2001

O PRINCIPIO DE SEMELLANZA

Ovidio Álvarez Santamarina; Manuel Díaz Regueiro; Miguel Rodríguez González

Xa Galileo observa que os seres vivos con formas semellantes tiñan as súas dimensións sometidas a certas restriccións; nin aumentaban nin diminuían extraordinariamente respecto duns valores estandard.

Neste artigo presentamos algúns exemplos de como as leis físicas impoñen limitacións ós tamaños dos obxectos seres vivos cunha mesma forma e uns mesmos materiais.

É necesario precisar qué entendemos por formas semellantes. Diremos que dous corpos A e B no espacio euclídeo son semellantes se, e só se, existe unha bixección, f: A---> B que satisfai a seguinte condición:

d(a,b)= k d(f(a),f(b))

sendo a e b puntos de A, d a distancia euclídea e k unha constante fixa para calquera a e b.

Desta definición dedúcense as seguintes propiedades:

i) Se dous corpos A e B son semellantes, $S_A = k^2 S_B$, sendo S_A e S_B as superficies de A e B respectivamente.

ii) Se A e B son semellantes, $V_A = k^3 V_B$ sendo V_A e V_B os volumes respectivos.

A demostración rigorosa destas propiedades non é sinxela, salvo no caso de poliedros ou superficies que satisfagan unhas condicións de integrabilidade, diferenciabilidade e convexidade determinadas [1].

Sexan A e B dúas superficies semellantes planas, con centro de semellanza no orixe de coordenadas[2], nas condicións anteditas,

$$S_B = \frac{1}{2}\int xdy - ydx$$

tendo en conta que x'=kx e y'=ky,

$$S_A \frac{1}{2}\int x'dy' - y'dx' = k^2 \frac{1}{2}\int xdy - ydx = k^2 S_B$$

Con isto xustificamos a propiedade i). Analogamente xustifícase ii) tendo en conta que

$$V = \int dxdydz$$

Enunciamos entón o principio de semellanza: Dado un sistema físico en equilibrio, cunhas variables que obedecen a unha ecuación determinada, ó transformar mediante unha semellanza dito sistema, a ecuación consérvase, pero o equilibrio non se mantén necesariamente.

Hai multitude de situacións que se rexen por ese principio; non obstante o seu sentido preciso quedará perfectamente claro en cada un dos seguintes exemplos.

Consideremos un cilindro de volume V e área da base S, con densidade p.

A presión que exerce este cilindro sobre a súa base, está dada pola ecuación $P = \frac{pVg}{S}$

Sexa outro cilindro semellante ó primeiro; o seu volume V' será igual a k^3V e a súa base S'= k^2S. deste modo $P' = \frac{pV'g}{S'} = kP$

Por tanto, non podemos construír cos mesmos materiais, cilindros de dimensións arbitrarias, pois chegaría un momento en que as presións serían prohibitivas e desmoronaríase a súa estructura. Aquí o termo equilibrio refírese á forma cilíndrica.

Pola mesma razón, os edificios cunha estructura e materiais fixos terán unhas dimensións máximas, por riba das cales será imposible a súa existencia. Isto podemos ilustralo co seguinte caso sinxelo. Supoñamos unha táboa de madeira (coeficiente á tracción c_t=600 Kg cm^{-2}) de catro metros de lonxitude, 15 cm de ancho e 12 cm de grosor, apoiada nos seus extremos. A carga máxima que pode soportar no seu punto medio ven dada por

$$P = \frac{I 4c_t}{Vl}$$

onde V é a semidistancia entre a fibra de madeira mas distendida á que menos se distenda, I é o momento de inercia e l é a distancia entre puntos de apoio. Así

$$P = \frac{BH^3/12}{H/2}\frac{4c_t}{l} = \frac{15:12^2}{6}\frac{4.600}{400} = 2160Kg.$$

Se duplicamos as dimensións, a carga máxima que agora pode soportar sería P'=8.640 Kg. Se nas condicións anteriores, tivesemos sobre o punto medio da táboa, unha esfera dun determinado material cun peso que fose 2.100 Kg, o sistema táboa-esfera estaría en equilibrio. No segundo caso, ó transformar a esfera mediante a semellanza, o seu peso sería (2^3)x 2.100 Kg., ou sexa 16.800 Kg co que a táboa rompería e non se mantería o equilibrio.

Nótese que aquí k é 2 e que o peso varía co volume que a súa vez o fai como k^3 mentres que a carga máxima como k^2 , é dicir, como a súa sección.

A Natureza é extraordinariamente disciplinada respecto ó Principio de Semellanza e é ela a que nos proporciona os exemplos máis interesantes.

Pensemos nos vexetais como unha escala dos seres vivos. Nun bosque o esencial é alcanzar a maior altura posible co obxecto de captar a maior cantidade de radiación solar. ¿Hai unha altura crítica que non poida ser sobrepasada? ¿De que factores depende?. O problema non é trivial e necesita dunha ferramenta matemática forte, que aquí limitámonos a ilustrar.

Consideremos unha barra uniforme e elástica encaixada nun soporte e en posición vertical. A posición vertical de equilibrio é a única estable se a súa lonxitude non excede unha altura crítica; se sobrepasamos esta altura, hai outras posicións de equilibrio distintas da vertical, e así, se desprazamos levemente o extremo superior da posición vertical, a barra non volvería a recuperarse.

Chamemos l á lonxitude da barra, a ó radio da súa sección, w ó peso por unidade de lonxitude, E ó módulo de Young e $I = \frac{1}{4p} a^4$ ó seu momento de inercia. Supoñamos que a barra está en equilibrio nunha posición desviada lixeiramente da vertical. Tomemos a orixe de coordenadas O no extremo superior da barra en posición vertical, o eixe x verticalmente cara abaixo e o eixe y no plano da barra. A condición de que a barra estea en equilibrio está refrexada na ecuación diferencial

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} + wx\frac{dy}{dx} = 0 \qquad [3]$$

que pode transformarse na $\frac{d^3y}{dx^3} + r^2 x\frac{dy}{dx} = 0$ facendo $r^2 = \frac{w}{EI}$

As condicións de contorno son dúas :

i) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ en x=0,

xa que non hai momento debido á curvatura por estar en equilibrio;

ii) $\frac{dy}{dx} = 0$ en x=l.

por estar a barra encaixada no soporte. Esta ecuación diferencial pódese reducir a unha de Bessel e debido ás condicións de contorno anteditas a súa solución é

$$J_{-1/3}\left(\frac{2rl^{\frac{3}{2}}}{3}\right) = 0$$

sendo J_n unha función de Bessel con n=-1/3 . A raíz mínima da ecuación $J_{-1/3}(x) = 0$ é x=1.18663 e de aquí que a barra permanecerá en equilibrio, separada da vertical cando 1 satisfaga a ecuación

$$\frac{2rl^{\frac{3}{2}}}{3} = 1.8663$$

é dicir

$$l^3 = 7,84\frac{EI}{w}$$

que proporciona a altura crítica da barra. Por isto unha cana de trigo inclínase baixo o peso da espiga, non porque a cana non posúa flexibilidade, senón porque o equilibrio estable na posición vertical é o único posible soamente por debaixo da lonxitude crítica, como ocorre co trigo verde.

Nótese que na ecuación $l^3 = 7,84\frac{EI}{w}$

refréxase a relación entre a lonxitude, a masa por unidade de lonxitude e a sección da barra. Neste caso a lonxitude crítica é proporcional a k^{-2} sendo k a constante de proporcionalidade.

Nos animais o Principio de Semellanza impón ós individuos da mesma familia, non só limitacións nas dimensións anatómicas, senón tamén condicionamentos metabólicos. É coñecido que a radiación calórica é proporcional á superficie do corpo emisor, mentres que a producción da enerxía calorífica é proporcional ó volume do corpo. Así, os mamíferos, que son animais homotermos, para manter a súa temperatura ideal, necesitan un aporte enerxético continuo. Os roedores, entre os que se atopan os mamíferos máis pequenos, teñen unha superficie corporal demasiado grande en relación ó seu volume, o que explica a súa voracidade. Deste modo, os ratos necesitan un consumo diario de alimentos igual á metade do seu peso, mentres o home, cunha relación superficie volume máis favorable, só necesita por termo medio, un cincuentaavo do seu peso. Este efecto é ben coñecido polos gandeiros; para o gando vacún, comprobouse que a ración mínima que ha de proporcionárselle para manter estable o seu peso, é proporcional á superficie do animal. Tómase como medida representativa da súa superficie p^2, sendo p o perímetro torácico, por ser a zona de localización pulmonar onde ten lugar a maior irradiación de calor. Entón, se R é a ración,

$R = t.p^2 = t'P^{\frac{2}{3}}$ sendo P o peso do animal e t unha constante de proporcionalidade. Neste caso R depende de k^2.

Este razoamento explica con claridade o por qué os mamíferos pequenos non abundan en lugares por riba dunha latitude determinada; por qué os insectos desaparecen coa chegada dos fríos invernais.

A transpiración é un medio de manter o equilibrio térmico; os insectos posúen un caparazón quitinoso inadecuado para realizar tal función, innecesaria e daniña para a súa relación superficie-volume.

O nariz, as mans, os pés e as orellas dos seres humanos, son as zonas do corpo que máis e que antes se arrefrían, debido, entre outras razóns, tamén a súa desfavorable relación superficie-volume.

A morfoloxía dos órganos dos seres vivos tamén está adaptada ó seu tamaño. A respiración ten como misión esencial aportar o osíxeno necesario para as oxidacións internas, así como a evacuación do CO_2 producido. O intercambio gasoso está en relación á superficie na que se realiza, mentres que as necesidades de osíxeno son proporcionais ó volume do individuo. Os pulmóns dos seres vivos inferiores son cavidades lisas en forma de bolsa. Nos seres vivos de maior tamaño, se os seus pulmóns mantivesen a mesma estructura non serían capaces de realizar o intercambio gasoso necesario; por isto, como é precisa unha maior superficie de intercambio ten lugar -unha variación da xeometría pulmonar, formando pregos e alvéolos. Os insectos e arácnidos xigantes das malas películas de ficción son seres imposibles, pois, ademais de que as súas patas non poderían sostelos, serían incapaces de respirar. Dicimos que as súas patas non serían capaces de sostelos porque, ó aumentar as súas proporcións de forma proporcional, a carga que poderían soportar as súas patas varía coa sección, mentres que o peso do animal está en relación ó seu volume.

Consideremos o fenómeno evolutivo en relación co Principio de Semellanza; supoñamos que nun instante alcanzouse na evolución a etapa correspondente a un mamífero herbívoro como a vaca, e que por razóns de medio ambiente o seu medio natural de alimentación vese reducido e este animal é obrigado a acceder ás follas das árbores para complementar a súa alimentación. A solución ó problema sería un cambio morfolóxico que lle permitise alcanzar maiores alturas, pero esta maior altura non podería conseguila cun aumento linear das súas proporcións. Unha solución "cuasi-proporcional" traduciríase nun gran aumento de peso, unha modificación da estructura das súas patas refrexada nun engrosamento; así mesmo o colo sufriría un engrosamento considerable, mitigado por un acurtamento. Estes cambios converterán nun ser pouco áxil e torpe de movementos. Esta é a solución coñecida como elefante. Outra solución sería o aumento non proporcional e si unha transformación especializada, o que conleva un cambio substancial na xeometría. Sería desexable un colo mas longo e extraordinariamente móbil, que necesitaría unha cabeza máis esvelta e lixeira; agora ben, este colo provocaría unha perda de estabilidade que se compensaría cunhas patas longas (para non ter que aumentar excesivamente a lonxitude do pescozo) inclinadas cara adiante e cara fóra as anteriores, e cara atrás as posteriores. Sería a solución xirafa.

Tamén o movemento se ve afectado polo principio; en liñas xerais a velocidade que alcanza un peixe, depende do traballo que pode realizar e da resistencia que pode vencer. As dimensións do traballo son proporcionais a k^3, posto que o traballo depende do volume muscular, mentres as da resistencia o son a k^2, dado que depende da súa superficie externa. Por mecánica elemental o traballo T é proporcional á resistencia R pola velocidade v ó cadrado; tendo en conta o anterior, v resulta proporcional a k^2 (Lei de Froude). O mesmo razoamento pode aplicarse a un barco e de aquí que canto maior sexa, maior será a velocidade que pode alcanzar considerando sempre os mesmos materiais e a mesma estructura.

En todos estes exemplos recalcamos ó utilizar o Principio de Semellanza a imposibilidade de reproducir as situacións mantendo fixas as estructuras, materiais, etc., para non caer na obcecación de Newcomb que utilizando estes razoamentos empeñouse na imposibilidade de voar a escala humana, con aparatos máis pesados co aire. A súa teimosía chegou ó extremo de que unha vez que os irmáns Wright demostraron o seu erro, dixese que sería imposible voar en aeroplano con dúas persoas. Newcomb non tivo en conta que a tecnoloxía moderna sería capaz de desenvolver novos materiais, novas xeometrías alares, e motores con empuxes moi superiores por unidade de peso ós do momento.

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Piskunov, N. Cálculo Diferencial e Integral, Moscú, Ed. Mir. (1977).

[2] Queysanne, M. Revuz, A. Geometría , Barcelona, Compañía Editorial Continental (1976)

[3] Bowman, F. Introduction to Bessel functions, Nova York, Dover,(1958).

[4] Thompson, D'Arcy, Sobre el crecimiento y la forma, H. Blume Edicións. Madrid. (1981).