GAMMA
setembro 2002

Serie de factoriais da función exponencial e aplicacións ó cálculo de raíces e potencias.

Manuel Díaz Regueiro. IES Xoán Montes.

Notación. Como notación (non estándar) utilizarei que $x^{(n}=x(x-1)(x-2)....(x-n+1)$ e que $x^{n)}=x(x+1)(x+2)....(x+n-1)$. E que $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ e $\nabla f(x)=f(x)-f(x-1)$.

Orixes das series de factoriais. Podemos chegar a elas por tres vías:

1) Utilizando as series de interpolación de Newton podemos supor que:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n f(0)\frac{x^{(n}}{n!} \quad e \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\nabla^n f(0)\frac{x^{n)}}{n!},$$

tendo en conta que as series definirán unha función en todos aqueles valores de x para os cales as series sexan converxentes. E as fórmulas serán válidas se os seus restos verifican que $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$.

Exemplo, se $f(x)=a^x$

$$\Delta f(x)=a^x(a-1) \quad \Delta^n f(0)=(a-1)^n \quad e \quad \nabla f(x)=a^x(1-\frac{1}{a})$$

que nos darán as fórmulas [1] e [2], expresadas máis adiante.

2) Estas fórmulas pódense deducir da serie binómica

$(1-z)^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n)}}{n!}z^n$, que para $z=\frac{a-1}{a}<1$ dá

$$a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n\frac{x^{n)}}{n!}$$ [2]; e de $(1+z)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n}}{n!}z^n$

que para -1<z=a-1<1 dá [1] $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}(a-1)^n\frac{x^{(n}}{n!}$.

Estudiando a converxencia da [1] vemos que é converxente se 0<a<2. Para a=2 será converxente se Re x>0 (é converxente se $|z|<1$, e absolutamente converxente para $|z|=1$ se Re x>0). En canto á [2] será converxente para calquera x real se a>1/2. Para a=1/2, é converxente se Re x<0 (converxente se $|z|<1$, e absolutamente converxente para $|z|=1$ se Re x<0) . Pola fórmula do resto dedúcese que, a igual *p* e *x*, en xeral, o resto será menor canto máis próximo a 1 estea *a* por ter unha potencia de ln*a*.

3) Utilización da transformada en **z**.

A transformada en **z** de a^x é $\frac{z}{z-a}$, e a de $\frac{x^{(n}}{n!}$ é $\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$. Como

$$\frac{z}{z-a}=\frac{z}{z-1}\frac{1}{1-\frac{a-1}{z-1}}=\frac{z}{z-1}\left(\sum\left(\frac{a-1}{z-1}\right)^n\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a-1)^n\frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

Achando a transformada inversa obtemos [1]. Así que temos, coa transformada en **z**, unha máquina de facer series de factoriais. Por exemplo:

$$\frac{(x+1)^{m)}}{m!}a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)^n}{a^{n+m+1}}\frac{(x+1)^{n+m)}}{(n+m)!}\frac{(m+1)^{n)}}{n!}$$

$$\frac{x^{(m}}{m!}a^x=\sum_{n=0}^{\infty}a^{m-1}(a-1)^n\frac{x^{(m+n}}{(n+m)!}\frac{m^{n)}}{n!}$$

sen máis que achar a transformada en **z** da función, desenvolvela en serie e calcular a transformada en **z** inversa que nos dá a serie buscada.

Agora aplicarémoslle as formulas ó cálculo de potencias e raíces.

Vimos que as fórmulas [1] $a^x=\sum_{n=0}^{\infty}(a-1)^n\frac{x^{n)}}{n!}$

son converxentes $\forall x \in R$ se 0<a<2, e [2] se a>1/2. Como exemplos,

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x^{n)}}{n!}, \quad 5^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{x^{n)}}{n!}$$

$$\text{e } 3^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \frac{x^{(n}}{n!}.$$

As fórmulas do segundo tipo fanse finitas para valores enteiros negativos do exponente.

$$5^{-3} = 1 - \frac{4}{5}.3 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \frac{3.2}{2!} - \left(\frac{4}{5}\right)^3 \frac{3!}{3!}$$

e, ademais, dan fórmulas para

$p \in N$ das C_p^n ou das CR_p^n.

Exemplos:

$$10^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n CR_p^n \text{ e } 7^{-p} = \sum_{n=0}^{p} \left(-\frac{6}{7}\right)^n C_p^n$$

Imos ver agora como se utilizan estas series para o cálculo de raíces ou potencias dun número (similar e, en certo modo, igual á utilización da serie binómica para ese cálculo).

$$\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n)}}{n!}$$

Como xa vimos, a fórmula da serie de factoriais a^x converxerá máis rápidamente se a base é máis próxima a 1. De aquí, se, por exemplo, temos que calcular $\sqrt[5]{100}$ e sabemos que unha aproximación é 2, desenvolveremos

$$\sqrt[5]{\frac{100}{32}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{68}{100}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}$$

, de onde,

$$\sqrt[5]{100} = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{68}{100}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}\right)$$

.Se tomamos como aproximación 2,5, temos,

$$\sqrt[5]{\frac{100}{2{,}5^5}} = \sqrt[5]{\frac{10^7}{9765625}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{234375}{10^7}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}$$

de onde

$$\sqrt[5]{100} = 2{,}5\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{234375}{10^7}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}\right)$$

Do mesmo modo pode facerse tomando como aproximación 2,51 ou 2,5118.

Se tomamos aproximacións por exceso (pero garantindo sempre que a base da exponencial sexa maior que 0,5), a serie resulta alternada, co que se facilita o cálculo do erro, que é menor que o valor absoluto do último termo desbotado. No caso anterior, as aproximacións serán 2,6 ou ben 2,52, etc. Por exemplo:

$$\sqrt[5]{100} = 2{,}6\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-0{,}1881376)^n \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n)}}{n!}\right)$$

Bibliografía.

DÍAZ REGUEIRO, M. “Algunhas notas sobre as series de factoriais $x^{(n}$”. *VIII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas*. Coimbra (1981).

Automática I. UNED. Madrid. (1976).

MARKUSEVITCH. *Teoría de las funciones analíticas*. Editorial Mir. Moscú. (1978).

HENRICI, PETER. *Elementos de cálculo numérico*. Editorial Trillas. México. (1972).

ABELLANAS. *Elementos de Matemáticas*. Madrid. (1970).