# GENERALIZACIONES DE LOS TEOREMAS RELATIVOS A UNA FUNCIÓN DERIVABLE EN UN INTERVALO

Manuel Díaz Regueiro
IES XOÁN MONTES. LUGO
**GAMMA DIXITAL Nº 3 MARZO 2006**

**ÍNDICE**



## 1-OPERADORES DIFERENCIALES $\mathcal{F}$. PROPIEDADES.

Sean f,g,h,p,..funciones reales de variable real. En lo que sigue se entiende que todas las funciones tienen un dominio de definición común y que cumplen las condiciones necesarias para que puedan verificar, en cada caso, las igualdades que se proponen (por ejemplo, existencia de derivada n-sima, no anulación de g'(x),etc).

Sea $\mathcal{F}$=pD un operador diferencial tal que $\mathcal{F}(f)(x)=p(x)f'(x)$. Propiedades:

1-$\mathcal{F}(f+g)=\mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(g)$ pues $p(f'+g')=pf'+pg'$.

2-$\mathcal{F}(cf)=c\mathcal{F}(f)$, (c constante), pues $p(cf)'=c(pf')$.

3-$\mathcal{F}(f.g)=f\mathcal{F}(g)+g\mathcal{F}(f)$, ya que $p(fg)'=f(pg')+g(pf')$.

4-$\mathcal{F}(f/g)=(\mathcal{F}(f)g-\mathcal{F}(g)f)/g^2$, ya que $p(f'g-g'f)/g^2=(g(pf')-f(pg'))/ g^2$

La importancia de estos operadores se pone de manifiesto en las propiedades siguientes que se refieren al problema clásico de derivadas sucesivas de funciones compuestas en el que "la fórmula final a que así se llega, dada por FAÁ DI BRUNO, carece de valor práctico" (Rey Pastor, Teoría de Funciones).

5-Si $\mathcal{F}=1/g'(x)D$ entonces se cumple (supuesto $g'(x)\neq 0$)

$[D^n(f)](g(x))=\mathcal{F}^n(f(g(x)))$.

Dem.- $D^{(n}(f)=f^{(n}$ .Se prueba por inducción que $\mathcal{F}^n(f(g(x)))=f^n(g(x))$.

Para n=1, $\mathcal{F}(f(g(x)))=(1/g'(x)D)(f(g(x)))=f'(g(x))g'(x)/g'(x)=f'(g(x))$.

Si es cierto para n, lo es para n+1 :

$\mathcal{F}^{n+1}(f(g(x)))=\mathcal{F}(\mathcal{F}^n(f(g(x))))=\mathcal{F}(f^{(n}(g(x)))=[1/g'(x)D]f^{(n}(g(x))$ = $[1/g'(x)]f^{(n+1}(g(x)).g'(x)=f^{(n+1}(g(x))$.

6-Sea $y=p^{-1}(x)$, es decir, $x=p(y)$, entonces, $y_x^{'}=\dfrac{1}{x_y}=\dfrac{1}{p'(y)}$

Sea $\mathcal{F}=p'(y)D$, se demuestra por inducción que:

$[\mathcal{F}^n(f(p^{-1}(x)))](p(a))=[D^n(f)](a)$

Si n=1, $[\mathcal{F}(f(p^{-1}(x)))](p(a))=[(p'(y)D)(f(p^{-1}(x)))](p(a))=$ $[p'(y)f'(p^{-1}(x))1/ p'(y)](p(a))=f'(p^{-1}(p(a)))=f'(a)$.

Supuesta cierta para n,

$\mathcal{F}^{\,n+1}(f(p^{-1}(x)))=\mathcal{F}(\mathcal{F}^{\,n}(f(p^{-1}(x))))=\mathcal{F}(f^{(n}(p^{-1}(x)))=$ $[p'(y)D](f^{(n}(p^{-1}(x)))=p'(y)f^{(n+1}(p^{-1}(x))/ p'(y)=f^{(n+1}(p^{-1}(x))$

Así que $[\mathcal{F}^{n+1}(f(p^{-1}(x)))](p(a))=[f^{(n+1}(p^{-1}(x))](p(a))=f^{(n+1}(a)$.

Por lo visto hasta ahora es claro que:

7-Si $y=p^{-1}(x)$, $x=p(y)$, y $\mathcal{F}=p'(y)D$

$[\mathcal{F}^n(f(p^{-1}(x)))](a)=[D^n(f)](p^{-1}(a))$

8-Si $\mathcal{F}=1/g'(x)D$

$[D^n(f)](a)=\mathcal{F}^n(f(g(x)))(g^{-1}(a))$

9-Sean $\mathcal{F}_1=p_1D$ y $\mathcal{F}_2=p_2D$, $\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2=\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$ si y solo si $p_1=kp_2$.

$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2=p_1p_2D+p_1p_2D$; $\mathcal{F}_2\mathcal{F}_1=p_2p_1D+p_2p_1D$ luego serán iguales si $p_1p_2=p_2p_1$, es decir $p_1=kp_2$, (k constante).

10-Las fórmulas siguientes son equivalentes:

$(D(1/g'(x)))^n[y(g(x))g'(x)]=[D^n y](g(x))g'(x)$

$(1/g'(x))(D(1/g'(x)))^n\ [y(g(x))g'(x)]=[D^n y](g(x))=((1/g'(x))D)^n(y(g(x)))$

$(1/g'(x))(D(1/g'(x)))^n\ [z.g'(x)]=((1/g'(x))D)^n(z)$

$(1/g'(x))(D(1/g'(x)))^n\ [z]=((1/g'(x))D)^n(z/g'(x))$

$(D(1/g'(x)))^{n-1}\ [z]=D((1/g'(x))D)^{n-1}(z)$ y, en general, puede probarse por inducción $(D\,p(x))^n\,D\,(z)=D(p(x)D)^n(z)$.

**2-APLICACIONES**

1-Funciones de Bessel.

Las funciones esféricas de Bessel $j_l=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)\quad y_l=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}Y_{l+\frac{1}{2}}(x)$

tienen las siguientes fórmulas operacionales de Rayleigh $j_l=(-x)^l\left(\dfrac{1}{x}D\right)^l\dfrac{sen\,x}{x}$

$y_l=(-x)^l\left(\dfrac{1}{x}D\right)^l\dfrac{-cosen\,x}{x}$

Si aplicamos la fórmula 8 para $g(x)=x^2$ tenemos

$2^n[D^n(f)](a)=[\left(\dfrac{1}{x}D\right)^n(f(x^2))](\sqrt{a})$ de donde resulta que

$$j_l=(-x)^l\left(\frac{1}{x}D\right)^l\frac{sen\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}=(-x)^l\,2^l\left[\left(D^l\left(\frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right)(x^2)\right]$$

$$y_l=(-x)^l\left(\frac{1}{x}D\right)^l\frac{-cosen\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}=(-x)^l\,2^l\left[\left(D^l\left(\frac{-cosen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right)(x^2)\right]$$

o bien que $j_l\left(\sqrt{x}\right)=(-2)^l\,x^{\frac{l}{2}}D^l\left(\dfrac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\qquad y_l\left(\sqrt{x}\right)=(-2)^l\,x^{\frac{l}{2}}D^l\left(\dfrac{-cosen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$

de donde $\dfrac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(x-x_0)^l\frac{j_l\left(\sqrt{x_0}\right)}{(-2)^l\,x_0^{\frac{l}{2}}l!}\qquad\dfrac{-cosen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sum_{l=0}^{\infty}(x-x_0)^l\frac{y_l\left(\sqrt{x_0}\right)}{(-2)^l\,x_0^{\frac{l}{2}}l!}$

De modo igual, podrían hacerse estos cambios y encontrar series del mismo tipo para las fórmulas 9-1-30, 9-6-28, 10-1-23, 10-1-24, 10-1-25, 10-1-26, 10-2-22, 10-2-23, 10-2-24, 10-2-25 del Handbook of Mathematical functions (Abramowitz y Stegun -novena edición de Dover). Por ejemplo, 9-1-30

$$z^{\nu-k}\mathrm{C}_{\nu-k}(z)=\left(\frac{1}{z}D\right)^k\left\{\left(\sqrt{z^2}\right)\mathrm{C}_\nu\left(\sqrt{z^2}\right)\right\}=2^k\left[D^k\left\{\left(\sqrt{z}\right)\mathrm{C}_\nu\left(\sqrt{z}\right)\right\}\right]\left(z^2\right)$$

$$z^{\frac{\nu-k}{2}}\mathrm{C}_{\nu-k}\left(\sqrt{z}\right)=2^k\left[D^k\left\{\left(\sqrt{z}\right)\mathrm{C}_\nu\left(\sqrt{z}\right)\right\}\right] \text{ y } \left(\sqrt{z}\right)\mathrm{C}_\nu\left(\sqrt{z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\frac{z_0^{\frac{\nu-k}{2}}\mathrm{C}_{\nu-k}\left(\sqrt{z_0}\right)}{2^k k!}$$

2-Si g(x)=ln|x| en [5], tenemos $\mathcal{F}$=xD,

$[D^n(f)](\ln|x|)=\mathcal{F}^n(f(\ln|x|))=[(xD)^n](f(\ln|x|))$ una fórmula que es la base de la resolución de las E. D. de Euler, que, no en su forma habitual, sino en una equivalente, se puede escribir,

$[a_0(xD)^n + a_1(xD)^{n-1} + \ldots + a_n]y(x)=0$, ahora bien,

$[a_0(xD)^n + a_1(xD)^{n-1} + \ldots + a_n]y(\ln|x|)=[(a_0D + a_1D + \ldots + a_n)y(x)](\ln|x|)$

por lo que se ve que se puede reducir a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.

Si aplicamos [5] $[D^n(f)](g(x))=\mathcal{F}^n(f(g(x)))$ vemos que

$[a_0\mathcal{F}^n+a_1\mathcal{F}^{n-1} + \ldots + a_n]y(g(x))=[(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n)y(x)](g(x))$ que demuestra el siguiente teorema:

La condición necesaria y suficiente para que una E. D. lineal homogénea se pueda reducir mediante el cambio de variable $x=g^{-1}(t)$ (o la sustitución de y(x) por y(g(x)) ) a una E. D. lineal con coeficientes constantes es que admita la expresión operacional $[a_0\mathcal{F}^n+a_1\mathcal{F}^{n-1} + \ldots + a_n]y=0$, siendo $\mathcal{F}=1/g'(x)D$.

Consideraciones semejantes pueden hacerse sobre las E. en derivadas parciales de Cauchy o las que mediante sustituciones separadas en cada una de las variables pueden ser reducidas a Ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes.

3- Generalización de [5].

Si $\mathcal{P}_1$ es un operador diferencial $\mathcal{P}_1=p_0(x)(1/g'(x)D)^n + p_1(x)(1/g'(x)D)^{n-1} + \ldots$

$\ldots + p_n(x)$ y $\mathcal{P}_2=p_0(g^{-1}(x))D^n + p_1(g^{-1}(x))D^{n-1} + \ldots + p_n(g^{-1}(x))$, usando

[5] resulta $\mathcal{P}_1(f(g(x)))=[\mathcal{P}_2(f)](g(x))$

que nos dice que si en la E. D. $\mathcal{P}_2(f)(x)=0$ sustituimos x por g(x) la convertimos en la E. D. $\mathcal{P}_1(f(g(x)))=0$, o simplemente, $\mathcal{P}_1(y)=0$ y que si en esta última sustituimos y por f(g(x)) tenemos una E. D. de operador $\mathcal{P}_2$.De otra manera, que si en $\mathcal{P}_1(y)$ hacemos el cambio de variable $x=g^{-1}(t)$ obtenemos el operador $\mathcal{P}_2$.

4-Si en [5] $g(x)=f^{-1}(x)$, tenemos $[D^n(f)](f^{-1}(x))=\mathcal{F}^n(x)$.

5-Sea una función o curva representada paramétricamente $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$,cuando $t_0\leqslant t\leqslant T$ y la función $x=\varphi(t)$ en el segmento $[t_0,T]$ tiene su inversa $t=\phi(x)$ y además $\varphi'(t)\neq 0$. En este caso,

$y^{(n}=(1/\varphi'(t)D)^n(\psi(t))$.

6- Si $\mathcal{F}=1/g'(x)D$, entonces $\mathcal{F}(g(x)^n)=n\, g(x)^{n-1}$

7-Polinomios ortogonales.

Comenzando por la fórmula de Rodrigues $f_n=1/(e_nw(x))D^n\{w(x)[g(x)]^n\}$, si la particularizamos al caso en que $g(x)=1-x^2$ y aplicamos [6],

tenemos que $f_n=\dfrac{2^n}{e_nw(x)}\left(\sqrt{1-x}D\right)^n\left\{w\left(\sqrt{1-x}\right)x^n\right\}\left(1-x^2\right)$ es decir

$f_n\left(\sqrt{1-x}\right)=\dfrac{2^n}{e_nw\left(\sqrt{1-x}\right)}\left(\sqrt{1-x}D\right)^n\left\{w\left(\sqrt{1-x}\right)x^n\right\}$, concretando

22-11-2 $C_n^{(\alpha)}\left(\sqrt{1-x}\right)=\dfrac{2^n x^{\frac{1}{2}-\alpha}}{e_n}\left(\sqrt{1-x}D\right)^n\left\{x^{n+\alpha-\frac{1}{2}}\right\}$

22-11-3 $T_n\left(\sqrt{1-x}\right)=\dfrac{2^n x^{\frac{1}{2}}}{e_n}\left(\sqrt{1-x}D\right)^n\left\{x^{n-\frac{1}{2}}\right\}$

22-11-4 $U_n\left(\sqrt{1-x}\right)=\dfrac{2^n x^{-\frac{1}{2}}}{e_n}\left(\sqrt{1-x}D\right)^n\left\{x^{n+\frac{1}{2}}\right\}$

22-11-5 $P_n\left(\sqrt{1-x}\right)=\dfrac{2^n}{e_n}\left(\sqrt{1-x}D\right)^n\left\{x^n\right\}$ (numeración del Handbook of Math. funct., también podría incluirse la 22-11-1). En cuanto a la 22-11-7 una transformación similar da:

22-11-7 $H_n\left(\sqrt{1-x}\right)=(-2)^n e^x\left(\sqrt{1-x}D\right)^n\left\{e^{-x}\right\}$

22-11-8 $He_n\left(\sqrt{x}\right)=(-2)^n e^{\frac{x}{2}}\left(\sqrt{x}D\right)^n\left\{e^{-\frac{x}{2}}\right\}$

BIBLIOGRAFÍA

Abramowitz and Stegun, Handbook of mathematical functions. Ninth edition of Dover.

Manuel Díaz Regueiro. Series de potencias de una función. Actas de las IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. Acta Salmanticensia Ciencias 46. Universidad de Salamanca. 1982.

## 3-GENERALIZACIONES DEL TEOREMA DE TAYLOR

**Teorema 1**-Sean f, g, p, funciones reales de variable real, continuas en [a,b], de clase n en [a,b) y con derivada n+1 en (a,b), siendo $p'(x)\neq 0$ en (a,b). Si cumplen que f(a)=g(p(a)), y, f(b)=g(p(b)) y que $\forall i=1,...,n$,
$\mathcal{F}^{i}(f)(a)=g^{(i}(p(a))\backslash 2$, siendo $\mathcal{F}=1/p'(x)D$, entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $\mathcal{F}^{n+1}(f)(c)=g^{(n+1}(p(c))$.

Dem: Como f(a)=g(p(a)), y, f(b)=g(p(b)), entonces existe un $c_1\in(a,b)$ tal que $\mathcal{F}(f)(c_1)=g'(p(c_1))$ (Corolario 3 del Teorema 2 de la sección anterior), como además $\mathcal{F}(f)(a)=g'(p(a))$, (por el mismo corolario) existe un $c_2\in(a,c_1)$ tal que $\mathcal{F}^2(f)(c_2)=g^{(2}(p(c_2))$, etc siguiendo los mismos pasos se llega a que existe un $c\in(a,c_n)$ tal que $\mathcal{F}^{n+1}(f)(c)=g^{(n+1}(p(c))$.

Con las hipótesis del teorema 1:

**Teorema 2.**(Generalización del teorema de Taylor). Si $g(x)=f(a)+\mathcal{F}(f)(a)(x-p(a))+\mathcal{F}^{(2}(f)(a)(x-p(a))^2/2!+.....+\mathcal{F}^{(n}(f)(a)(x-p(a))^n/n!+\lambda(x-p(a))$ y $\lambda$ es tal que g(p(b))=f(b) entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $\mathcal{F}^{n+1}(f)(c)=g^{(n+1}(p(c))=\lambda$, es decir
$f(b)=f(a)+\mathcal{F}(f)(a)(p(b)-p(a))+\mathcal{F}^2(f)(a)(p(b)-p(a))^2/2!+...$
$..+\mathcal{F}^{n}(f)(a)(p(b)-p(a))^n/n!+\mathcal{F}^{n+1}(f)(c)(p(b)-p(a))^{n+1}/(n+1)!$

**Corolario 1.** Teorema de Taylor (con resto de Lagrange).

Dem : basta usar p(x)=x en el teorema 2.

**Teorema 3.** Sean t,g,p funciones reales continuas en un intervalo [a,b], de clase n en [a,b) y con derivada n+1 en [a,b) y siendo $p'(x)\neq 0$ en (a,b). Si t(p(a))=g(p(a)) y t(p(b))=g(p(b))\ y $\forall i=1,..,n$

$\mathcal{F}^{(i}(t(p(x)))(a)=\mathcal{F}^{(i}(g(p(x)))(a)$, (es decir $t^{(i}(p(a))=g^{(i}(p(a))$ )
entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $\mathcal{F}^{(n+1}(t(p(x)))(c)=\mathcal{F}^{(n+1}(g(p(x)))(c)$
o de otro modo $t^{(n+1}(p(c))=g^{(n+1}(p(c))$, (siendo $\mathcal{F}=1/p'(x)D$).

**Corolario 1**. Si $g(x)=f(a)+\mathcal{F}(f)(a)(x-p(a))+.... +\mathcal{F}^{(n}(f)(a)(x-p(a))^n /n!$
y t(x) es una función tal que $t(p(a))=f(a)$, $t'(p(a))=\mathcal{F}(f)(a),...,$
$t^{(n}(p(a))=\mathcal{F}^{(n}(f)(a)$, además de $t(p(b))=g(p(b))$ (cumpliendo t y p las hipótesis del teorema 3), entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $t^{(n+1}(p(c))= g^{(n+1}(p(c))=0$.

**Corolario 2**. Si $g(x)=t(p(a))+t'(p(a))(x-p(a))+....+t^{(n}(p(a))(x-p(a))^n/n! +\lambda(x-p(a))^{n+1}/(n+1)!$ entonces $g(p(a))=t(p(a))$, $g'(p(a))=t'(p(a))$, ..., $g^{(n}(p(a))=t^{(n}(p(a))$ y $\lambda$ es tal que $g(p(b))=t(p(b))$, entonces por el teorema 3, existe un $c\in(a,b)$ tal que $g^{(n+1}(p(c))=t^{(n+1}(p(c))=\lambda$
es decir $t(p(b))=t(p(a))+t'(p(a))(p(b)-p(a))+....+ t^{(n}(p(a))(p(b)-p(a))^n /n!+t^{(n+1}(p(c))(p(b)-p(a))^{n+1} /(n+1)!$ o bien, $t(p(x))=t(p(a))+t'(p(a))(p(x)-p(a))+....+t^{(n}(p(a))(p(x)-p(a))^n /n!+ t^{(n+1}(p(c))(p(x)-p(a))^{n+1}/(n+1)!$ otra versión del teorema 2, para $f(x)=t(p(x))$.

**Corolario 3**.-Si en el corolario 2 $p(x)=t^{-1}(x)$, $p(a)=b$, $p(x)=y$,
entonces $x=a+\mathcal{F}(x)(a)(y-b)+\mathcal{F}^{(2}(x)(a)(y-b)/2 +...+\mathcal{F}^{(n}(x)(a)(y-b)^n /n!+ \mathcal{F}^{(n+1}(x)(\alpha)(y-b)^{n+1} /(n+1)!$, siendo $\alpha$ un punto entre a y x y $\mathcal{F}=1/p'(x)D$.

**Teorema 4.** Sean t,g,p funciones reales continuas en un intervalo, [a,b], de clase n en [a,b) y con derivada n+1 en [a,b) y siendo $p'(x)\neq 0$ en (a,b). Si $t(a)=g(a)$ y $t(b)=g(b)$ y $\forall i=1,..,n$
$\mathcal{F}^{(i}(t(x))(a)=\mathcal{F}^{(i}(g(x))(a)$, (siendo $\mathcal{F}=1/p'(x)D$)
entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $\mathcal{F}^{(n+1}(t(x))(c)=\mathcal{F}^{(n+1}(g(x))(c)$.
Dem : De $t(a)=g(a)$ y $t(b)=g(b)$ por el teorema 8 de la sección anterior existe un $c_1\in(a,b)$ tal que $\mathcal{F}(t)(c_1)=\mathcal{F}(g)(c_1)$, de aquí, por la misma razón existe un $c_2\in(a,c_1)$ tal que $\mathcal{F}(t)(c_2)=\mathcal{F}(g)(c_2)$, etc, hasta llegar a que existe un $c\in(a,b)$ tal que $\mathcal{F}^{(n+1}(t)(c)=\mathcal{F}^{(n+1}(g)(c)$.

**Corolario 1**. $g(x)=f(a)+\mathcal{F}(f)(a)(p(x)-p(a))+.... +\mathcal{F}^{(n}(f)(a)(p(x)-p(a))^n/n!$
y $t(x)=f(x)-\lambda(p(x)-p(a))^{n+1}/(n+1)!$ se cumplen las hipótesis del teorema 1(si $\lambda$ es tal que $t(b)=g(b)$), por lo que existe un $c\in(a,b)$ tal que $\mathcal{F}^{(n+1}(t)(c)= \mathcal{F}^{(n+1}(g)(c)=\lambda= \mathcal{F}^{(n+1}(f)(c)$, es decir se cumple el teorema 2.

**Corolario 2**. Si $\mathcal{F}$ $\mathcal{F}^{(n+1}(f)(x)=0$ en (a,b), entonces, $g(x)=f(a)+\mathcal{F}(f)(a)(p(x)-p(a))+.... +\mathcal{F}^{(n}(f)(a)(p(x)-p(a)^n/n!$ es la solución a la ecuación $\mathcal{F}^{(n+1}(f)(x)=0$ que cumple las condiciones iniciales $g(a)=f(a)$, $\mathcal{F}(g)(a)=\mathcal{F}(f)(a),....,\mathcal{F}^{(n+1}(f)(a)= \mathcal{F}^{(n+1}(g)(a)$.

## 4-APLICACIONES

1) Sea P(x) un polinomio de grado 2n. El problema que se plantea es cuando $P(x)=P_1(x^2/2+bx+c)$, siendo $P_1(x)$ un polinomio de grado n (esto permitiría reducir el cálculo de las raíces del polinomio P(x) al de $P_1(x)$, de grado mitad).

**Teorema 1**. La condición necesaria y suficiente para que un polinomio P(x) de grado 2n sea expresable $P_1(Q(x))$, con $Q(x)= x^2/2+bx+c$ siendo $P_1(x)$ de grado n, es que $P(x)=k_1(x+b)^{2n}+k_2(x+b)^{2n-2}+...+k$
Dem: P(x) ha de tener un desarrollo del tipo $P(x)=a_0+a_1(x^2/2+bx+c)+. .+a_n (x^2/2+bx+c)$ ,lo que equivale a que $(1/(x+b)D)^nP(x)=cte=k_1$, de donde $(1/(x+b)D)^{n-1}$ P(x)= $\int k_1(x+b)dx = k_1\frac{(x+b)^2}{2}+k_2$, de aquí,

$$\left(\frac{1}{x+b}D\right)^{n-2}P(x)=\int\left(k_1\frac{(x+b)^2}{2}+k_2\right)(x+b)dx=k_1\frac{(x+b)^4}{4.2}+k_2(x+b)^2+k_3,\ \text{etc}$$

hasta llegar al resultado enunciado.

**Teorema 2**. La condición necesaria y suficiente para que un polinomio P(x) de grado np sea expresable $P_1(Q(x))$, con Q(x) un polinomio de grado p, siendo $P_1(x)$ de grado n, es que $\left(\frac{1}{Q'(x)}D\right)^n P(x)=cte$

Dem: Si $P(x)=a_0+a_1Q(x)+a_2Q(x)+...+a_nQ(x)$ esto equivale a que

$$\left(\frac{1}{Q'(x)}D\right)^n P(x)=cte$$

**Teorema 3**.La condición necesaria y suficiente para que una, función P(x) sea expresable como función polinómica de grado n de otra función Q(x) es que $\left(\frac{1}{Q'(x)}D\right)^n P(x)=cte$

**Corolario (ejemplo)**.$P(x)=P_1((ax+b)/x)$, siendo $P_1(x)$ un polinomio de grado n si y solo si $(-b\ x^2\ D)^n\ P(x)=cte$.

**Teorema 4**. La solución de la E. D. $\left(\frac{1}{Q'(x)}D\right)^n P(x)=cte$ es un polinomio de grado n y coeficientes arbitrarios de Q(x).

**Teorema 5**. La condición necesaria y suficiente para que P(x), un polinomio de grado mn sea composición $P_1((x+b)^m)$, siendo $P_1$ de grado m es que $\left(\frac{1}{Q'(x)}D\right)^m P(x)=cte$, y $q'(x)=n(x+b)^{n-1}$.

**Teorema 6**. La condición necesaria y suficiente para que P(x), un polinomio de grado mn+p sea igual a $(x+b)^p\ P_1((x+b)^n)$, siendo $P_1$ de grado m,y p<n es que $\left(\frac{1}{Q'(x)}D\right)^m P(x)=cte\,(x+b)^p$, y $q'(x)=n(x+b)^{n-1}$ .

**5-FÓRMULAS DEL RESTO PARA EL TEOREMA DE TAYLOR GENERALIZADO**

La fórmula de Taylor generalizada es:

$f(x)=f(a)+\mathcal{F}(f)(a)(p(x)-p(a))+....+\mathcal{F}^n(f)(a)(p(x)-p(a))^n/n!+R_n(x)$

donde ya se ha visto que una fórmula para el resto es :

$R_n(x)=\mathcal{F}^{n+1}(f)(a)(p(x)-p(a))^{n+1}/(n+1)!$. Ahora veremos otras fórmulas para el resto.

Si $R(t)=f(x)-f(t)-\mathcal{F}(f)(t)(p(x)-p(t))-...-\mathcal{F}^n(f)(t)(p(x)-p(t))^n$ entonces $\mathcal{F}(R(t))=-\mathcal{F}^{n+1}(f)(t)(p(x)-p(a))^n/n!$ ; $R'(t)=\mathcal{F}(R(t))p'(t)$.

Además R(x)=0. Si aplicamos el teorema de Cauchy a las funciones R(x)-R(a) y (p(x)-p(a))q (siendo $q\geq 1$), existe un c intermedio a a y x tal que :

$$\frac{R(x)-R(a)}{\left(p(x)-p(a)\right)^q}=\frac{-\mathcal{F}^{n+1}(f)(c).\frac{(p(x)-p(c))^n}{n!}}{q(p(x)-p(c))^{q-1}}$$

y de aquí

$$R(a)=\mathcal{F}^{n+1}(f)(c)\frac{\left(p(x)-p(c)\right)^{n-p+1}}{p\,n!}\left(p(x)-p(a)\right)^p$$

Otra fórmula del resto:

$$R(x)-R(a)=\int_a^x R'(t)dt=\int_a^x -\mathcal{F}^{n+1}(f)(t)\frac{\left(p(x)-p(t)\right)^n}{n!}p'(t)dt$$ de donde

$$R(a)=\int_a^x \mathcal{F}^{n+1}(f)(t)\frac{\left(p(x)-p(t)\right)^n}{n!}p'(t)dt$$

Estos restos se convierten para la fórmula de la función inversa

$$R(a)=\mathcal{F}^{n+1}(x)(c)\frac{\left(y(x)-y(c)\right)^{n-p+1}}{p\ n!}\left(y(x)-b\right)^p$$

$$R(a)=\int_a^y \mathcal{F}^{n+1}(f)(t)\frac{\left(y(x)-y(t)\right)^n}{n!}y'(t)dt$$ donde y=y(x)

## 6-GENERALIZACIONES DE OTROS TEOREMAS RELATIVOS A UNA FUNCIÓN DERIVABLE EN UN INTERVALO.

Las hipótesis comunes a los teoremas y corolarios siguientes son que las funciones son continuas en el intervalo [a, b] y derivables en (a, b).

**Teorema 1.**Sean f, g dos funciones tales que f(a)=p(a) y f(b)=p(b) entonces existe un $c\in(a, b)$ tal que f'(c)=p'(c).

Dem. Sea h(x)=f(x)-p(x). h'(x)=f'(x)-p'(x). Supongamos que $h'(x)\neq 0$ en el intervalo (a, b). Como h(x) es continua en [a, b] debe alcanzar su máximo M y su mínimo absoluto m en algún punto del intervalo [a, b]. Si alcanzase algún extremo en un punto interior del intervalo , sería h'(c)=0, contra lo que estamos suponiendo, luego ambos valores extremos (máximo y mínimo) son alcanzados en los extremos a y b. Pero como h(a)=h(b)=0, esto significa que m=M y por tanto h(x) es constante en [a, b].Esto contradice el hecho de que $h'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$. Resulta así que h'(c)=0 en un punto $c\in(a,b)$. De donde f'(c)-p'(c)=0.
Nota.-Si p(x)=cte, el teorema 1 se convierte en el teorema de Rolle.
**Corolario 1**. Teorema de Rolle.
**Corolario 2.**Si $f(a)=\alpha p(a)+k$ y $f(b)=\alpha p(b)+k$ entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\alpha p'(c)$.

**Corolario 3.**Si las funciones son (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) y (g(x)-g(a))(f(b)-f(a)) resulta el teorema de Cauchy.
**Corolario 4.**Si g(x)=x en el corolario 3, resulta el teorema del valor medio.
**Teorema 2.** Sean f, g, p funciones tales que f(a)=g(p(a)) y f(b)=g(p(b)) entonces existe un $c\in(a, b)$ tal que f'(c)=g'(p(c))p'(c).

Dem. Es un caso particular del teorema 1 en que p(x) es g(p(x)).

**Corolario 1.**Si g(x)=x y p(x)=cte, teorema de Rolle.

**Corolario 2.**Teorema de Cauchy.

Dem. Sea g(x) el polinomio de interpolación para los puntos

(p(a),f(a)) y (p(b),f(b)) que es $g(x)=\frac{f(a)(x-p(b))}{(p(a)-p(b))}+\frac{f(b)(x-p(a))}{(p(b)-p(a))}$

$g'(x)=\frac{f(a)}{p(a)-p(b)}+\frac{f(b)}{p(b)-p(a)}=\frac{f(b)-f(a)}{p(b)-p(a)}$ entonces por el teorema 2

existe un c∈(a, b) tal que f'(c)=g'(p(c))p'(c), $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{p(b)-p(a)}p'(c)$

**Corolario 3.** Si p'(x)≠0 en (a, b) y $\mathcal{F}$=1/p'(x)D entonces el teorema 2 se enuncia existe un c∈(a, b) tal que $\mathcal{F}$(f)(c)=g'(p(c)).

**Teorema 3.** Si t(f(a))=g(p(a)) y t(f(b))=g(p(b)) entonces existe un

c∈(a, b) tal que t'(f(c))f'(c)=g'(p(c))p'(c).
Dem. Es una consecuencia del teorema 1.
**Corolario 1.** Teorema de Rolle.
**Corolario 2.** Teorema de Cauchy.
Dem. Si t(x)=(x-f(a))(p(b)-p(a)) y g(x)=(x-p(a))(f(b)-f(a)) se cumplen las hipótesis y las tesis del teorema 3.
**Corolario 3.** Si p'(x)≠0 en (a, b) el teorema de Cauchy es el teorema del valor medio para el operador $\mathcal{F}$=1/p'(x)D, es decir, puede escribirse f(b)-f(a)= $\mathcal{F}$(f)(c)(p(b)-p(a)).
**Teorema 4.** Sean f, g, p funciones de clase $C^{n-1}$ en (a, b). Sean $a_1<a_2<..<a_n$ puntos de [a, b]. Si $f(a_i)=g(p(a_i))$ ∀i=1,.. n y p'(x)≠0 en (a, b) entonces existe un punto central α∈(a, b) tal que $\mathcal{F}^{(n-1}(f)(\alpha)=g^{(n-1}(p(\alpha))$, siendo $\mathcal{F}$=1/p'D.
Dem. ∀i= 1,..n-1 se cumple $f(a_i)=g(p(a_i))$ y $f(a_{i+1})=g(p(a_{i+1}))$ de donde por el corolario 3 del teorema 2 existe un $c_i\in(a_i, a_{i+1})$ tal que $\mathcal{F}(f)(c_i)=g'(p(c_i))$.
∀i=1,..n-2 se cumple $\mathcal{F}(f)(c_i)=g'(p(c_i))$ y $\mathcal{F}(f)(c_{i+1})=g'(p(c_{i+1}))$ luego por el corolario 3 del teorema 2 existe un $d_i\in(c_i,c_{i+1})$ tal que $\mathcal{F}^2(f)(d_i)=g^{(2}(p(d_i))$ etc. hasta que se llega a que existe un α∈(a, b) (central en el sentido de que se halla como punto intermedio de dos puntos, a su vez puntos intermedios de tres puntos, etc.) tal que $\mathcal{F}^{(n-1}(f)(\alpha)=g^{(n-1}(p(\alpha))$.
**Teorema 5.** Si p'(x)≠0 en (a, b), f y p de clase $C^{n-1}$ en (a, b) existe un punto central α ∈(a, b) tal que

$$\frac{F^{(n-1}(f)\ (a)}{(n-1)!}=\frac{f(a_1)}{(p(a_1)-p(a_2))..(p(a_1)-p(a_n))}+.......+\frac{f(a_n)}{(p(a_n)-p(a_1))..(p(a_n)-p(a_{n-1}))}$$

siendo $a_1<...<a_n$, puntos de [a, b], $\mathcal{F}$=1/p'(x)D, y $p(a_i)\neq p(a_j)$ (si i≠j).
Dem. Sea g(x) el polinomio de interpolación de los puntos $(p(a_1),f(a_1))$, ... $(p(a_n),f(a_n))$, es decir

$$g(x)=\frac{f(a_1)(x-p(a_2))...(x-p(a_n))}{(p(a_1)-p(a_2)).....(p(a_1)-p(a_n))}+.....+\frac{f(a_n)(x-p(a_1))...(x-p(a_{n-1}))}{(p(a_n)-p(a_1)).....(p(a_n)-p(a_{n-1}))}$$

$$F^{(n-1}(f)\ (x)=\frac{f(a_1)(n-1)!}{(p(a_1)-p(a_2))..(p(a_1)-p(a_n))}+.......+\frac{f(a_n)}{(p(a_n)-p(a_1))..(p(a_n)-p(a_{n-1}))}$$

y aplicando el teorema 4 existe un $\alpha \in (a, b)$ tal que $\mathcal{F}^{n-1}(f)(\alpha)=g^{(n-1}(p(\alpha))$, de donde resulta el teorema 5.

Nota: Como, cuando n=2 el teorema 5 es el teorema de Cauchy, constituye una generalización de este teorema.

**Corolario 1**. Si f y p cumplen las hipótesis del teorema 5 en [a, b] entonces $\forall x \in [a,b]$ $f(x)=I_p(a_1,..,a_{n-1})+\dfrac{F^{(n-1}(f)(c)}{(n-1)!}(p(x)-p(a_1))....(p(x)-p(a_{n-1}))$, donde $I_p$ es el polinomio de interpolación de la función f(x) en los puntos $a_1,..,a_{n-1}$, en el que la variable x se sustituye por p(x) y c es un punto central a $a_1,..,a_n$, x; (x no coincide con ningún $a_i$).

Dem : Se hace $a_n=x$ y se aplica el teorema 5, multiplicando por

$(p(x)-p(a_1))..(p(x)-p(a_{n-1}))$.

**Corolario 2**. Si f y p cumplen las hipótesis del teorema 5 en [a,b] y que $\mathcal{F}^{(n-1}(f)=0$ en (a,b), entonces si $a_1<a_2<..<a_{n-1}$ son puntos de [a, b] para todo x de [a, b], $f(x)=\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)\dfrac{\prod_j (p(x)-p(a_j))}{\prod_j (p(a_i)-p(a_j))}$ $(j\neq i)$ j=1,..,n-1.

Dem : en el corolario 1, sustituimos $\mathcal{F}^{n-1}(f)(c)$ por 0.

**Corolario 3**. La solución de la E. D. $\mathcal{F}^{n-1}(y)=0$ en el intervalo [a, b] con las condiciones de contorno $y(a_i)=f(a_i)$ (i=1,..,n-1) es la función f(x) del corolario 2.

**Corolario 4**. Si f y p cumplen las hipótesis del teorema 5, este se puede enunciar existe un $c\in (a,b)$ tal que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & ... & 1 \\ f(a_1) & f(a_2) & ... & ... & f(a_n) \\ (p(a_1))^2 & (p(a_2))^2 & ... & ... & (p(a_n))^2 \\ .. & ... & ... & ... & ... \\ (p(a_1))^{n-2} & (p(a_2))^{n-2} & .... & .... & (p(a_n))^{n-2} \end{vmatrix} (-1)^n = \frac{F^{(n-1}(f)(c)}{(n-1)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & ... & 1 \\ p(a_1) & p(a_2) & ... & ... & p(a_n) \\ (p(a_1))^2 & (p(a_2))^2 & ... & ... & (p(a_n))^2 \\ .. & ... & ... & ... & ... \\ (p(a_1))^{n-1} & (p(a_2))^{n-1} & .... & .... & (p(a_n))^{n-1} \end{vmatrix}$$

Dem :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ f(x) & f(a_1) & f(a_2) & ... & ... & f(a_n) \\ p(x) & p(a_1) & p(a_2) & ... & ... & p(a_n) \\ (p(x))^2 & (p(a_1))^2 & (p(a_2))^2 & ... & ... & (p(a_n))^2 \\ ..... & ... & ... & ... & ... & ... \\ (p(x))^{n-1} & (p(a_1))^{n-1} & (p(a_2))^{n-1} & ... & ... & (p(a_n))^{n-1} \end{vmatrix}$$

Esta es una función t(x) que se anula para $a1,a_2,...,a_n$, por lo que por el teorema 4 (con g(x)=0) existe un c perteneciente a (a, b) tal que $\mathcal{F}^{(n-1}(t)(c)=0$, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ F^{(n-1}(f)(c) & 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ p(x) & \mathrm{p(a_1)} & \mathrm{p(a_2)} & ... & ... & \mathrm{p(a_n)} \\ (p(x))^2 & \mathrm{(p(a_1))^2} & \mathrm{(p(a_2))^2} & ... & ... & \mathrm{(p(a_n))^2} \\ ..... & ... & ... & ... & ... & ... \\ (p(x))^{n-1} & \mathrm{(p(a_1))^{n-1}} & \mathrm{(p(a_2))^{n-1}} & ... & ... & \mathrm{(p(a_n))^{n-1}} \end{vmatrix} + ..... +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & .... & 1 \\ f(x) & f(a_1) & f(a_2) & ... & ... & f(a_n) \\ p(x) & \mathrm{p(a_1)} & \mathrm{p(a_2)} & ... & ... & \mathrm{p(a_n)} \\ (p(x))^2 & \mathrm{(p(a_1))^2} & \mathrm{(p(a_2))^2} & ... & ... & \mathrm{(p(a_n))^2} \\ ..... & ... & ... & ... & ... & ... \\ (n-1)! & 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{vmatrix} = 0$$

de donde el resultado.

**Teorema 6**. Si f es de clase $C^{n-1}$ en (a, b) y $a_1 < .. < a_n$ puntos de [a, b], existe un $\alpha \in$(a, b), "central", tal que

$$\frac{f^{(n-1}(\alpha)}{(n-1)!} = \frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)...(a_1-a_n)} + \frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)...(a_2-a_n)} + .... + \frac{f(a_n)}{(a_n-a_1)...(a_n-a_{n-1})}$$

Dem. Si p(x)=x en el teorema 5 nos da ese resultado.
Nota: constituye una generalización del teorema del valor medio.

Si n=2 nos da ese teorema. Si tomamos los puntos $\mathrm{a_i = a + (-1)^i} \dfrac{1}{2^{c+i}}$ (por ejemplo) el teorema 6 nos permite el cálculo numérico de la derivada n-sima de la función f(x) en un punto $\alpha$ de modo aproximado por los valores de la función en puntos próximos a $\alpha$.

Por otro lado si $a_n$ es variable (x), el teorema 6 es la fórmula del resto en la interpolación, así como el teorema 5 se convierte en la fórmula del resto para la interpolación de la función f(x) usando polinomios de la función p(x) (haciendo algunos cambios), así $\dfrac{F^{(n-1}(f)(c)}{(n-1)!}(p(x)-p(a_1))....(p(x)-p(a_n)) = f(x)-P(x)$ donde P(x) es el polinomio de interpolación de la función f(x) citado.

Considerando el polinomio de interpolación de Newton el teorema 5 se enuncia existe un $\alpha \in$(a,b) tal $\dfrac{F^{(n-1}(f)(\alpha)}{(n-1)!} = [p(a_1),...,p(a_n)]$ ese polinomio es $g(x) = \gamma_0 + \gamma_1(p(x)-p(a_1)) + ..... + \gamma_n(p(x)-p(a_1))..(p(x)-p(a_n))$ y

$\gamma_1 = \dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{p(a_2)-p(a_1)} = [p(a_2), p(a_1)]$ por ejemplo).Y el teorema 6 se escribe: existe un $\alpha \in$(a, b) tal que $\dfrac{f^{(n-1}(\alpha)}{(n-1)!} = =[a_n,....,a_1]$.

**Corolario 1**. Si f cumple las hipótesis del teorema 6 en [a, b] y que $f^{(n-1}(x)=0$ en (a, b), entonces si $a_1 < a_2 < .. < a_{n-1}$ son puntos de

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i)\frac{\prod_j (\mathrm{x}\text{-}\mathrm{a_j})}{\prod_j (\mathrm{a_i}\text{-}\mathrm{a_j})}$$

Dem : en el corolario 2 del teorema 5, hacemos p(x)=x.

**Corolario 2**. Si f es de clase $C^2$ en (a, b), f es convexa en [a, b] si para tres puntos cualesquiera de [a, b], $a_1<a_2<a_3$, se cumple que:

$$\frac{f(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{f(a_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}>0$$

o que $f(a_1)(a_3-a_2)-f(a_2)(a_3-a_1)+f(a_3)(a_2-a_1)>0$.

**Corolario 3**. La solución de la E. D. $y^{(n-1}=0$ en el intervalo [a, b] con las condiciones de contorno $y(a_i)=f(a_i)$ (i=1,..,n-1) es el polinomio f(x) del corolario 1.

**Corolario 4**. El teorema 6 se puede escribir : ∃ c∈(a, b) tal que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ f(a_1) & f(a_2) & \dots & \dots & f(a_n) \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{f^{(n-1}(c)}{(n-1)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_1^{2} & a_2^{2} & \dots & \dots & a_n^{2} \\ .. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

**Corolario 5**. f es convexa en [a, b] si para $a_1<a_2<a_3$ puntos del intervalo $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}>0$

**Teorema 7**- Si $t(p(a_1))=g(p(a_1)),.....,t(p(a_n))=g(p(a_n))$ existe un α∈(a, b) tal que $\mathcal{F}^{n-1}(t(p(x)))(\alpha)=\mathcal{F}^{\,n-1}(g(p(x)))(\alpha)$ es decir que $g^{(n-1}(p(\alpha))=t^{(n-1}(p(\alpha))$ siendo $\mathcal{F}=1/p'(x)D$ ($p'(x)\neq 0$ en (a, b)) .

Dem. Como el teorema 4, utilizando repetidamente el teorema 1 y que si las derivadas de t(p(x)) y g(p(x)) son iguales en un punto c, entonces t'(p(c))=g'(p(c)).

**Corolario 1**.Sea p(x)=x. Si $t(a_1)=g(a_1),....,t(a_n)=g(a_n)$, siendo $a_1<..<a_n$ puntos de [a, b], entonces existe α∈(a, b) tal que $t^{(n-1}(\alpha)=g^{(n-1}(\alpha)$ (t y g de clase n-1 en (a,b)).

**Corolario 2**.Sea g(x)=cte, con las hipótesis del teorema 7, es decir, $t(p(a_1))=t(p(a_2))=...=t(p(a_n))$ entonces existe un α∈(a,b) tal que $\mathcal{F}^{n-1}(t(p(x)))(\alpha)=0$, es decir $t^{(n-1}(p(\alpha))=0$

**Corolario 3**.Si $t(x)=\Pi_i(x-p(a_i))$, entonces $t(p(a_i))=0$ para todo i de 1 a n. Luego, por el corolario 2, existe un α∈(a,b) tal que

$t^{(n-1}(p(\alpha))=0$,es decir, $n!p(\alpha)-(n-1)!\sum_{i=1}^{n}\mathrm{p(a_i)}=0 \Rightarrow$

$$\mathrm{p}(\alpha)=\frac{\sum \mathrm{p(a_i)}}{n}$$

**Corolario 4**. Si p tiene inversa la media

$\alpha=p^{-1}\left(\frac{\sum p(a_i)}{n}\right)$ es punto central α a los puntos $a_1,...,a_n$.

**Corolario 5**. Si p(x) es p(f(x)) en el corolario 3 y p tiene inversa existe un $\alpha\in$(a, b) tal que $f(\alpha)=p^{-1}\left(\frac{\sum p(f(a_i))}{n}\right)$

En lo que sigue se entiende que $p(a_i)\neq p(a_j)$ si $i\neq j$.

**Corolario 6**.-Si $t(x)=\sum g(a_i)\frac{\prod_j (p(x)-p(a_j))}{\prod_{j(i\neq j)}(p(a_i)-p(a_j))}$ se cumple que $t(a_i)=g(a_i)$ $\Rightarrow$ existe un $\alpha\in$(a,b) tal que $t^{(n-1}(\alpha)=g^{(n-1}(\alpha)$ es decir

$t^{(n-1}(\alpha)=D^{(n-1}\left(\sum g(a_i)\frac{\prod_j (p(x)-p(a_j))}{\prod_{j(i\neq j)}(p(a_i)-p(a_j))}\right)(\alpha)=g^{(n-1}(\alpha)$. Cuando n=2, es el teorema de Cauchy, por lo que es una generalización de ese teorema.

**Corolario 7**. Si $t(x)=\sum g(a_i)\frac{\prod_j (p(x)-p(a_j))}{\prod_{j(i\neq j)}(p(a_i)-p(a_j))}\frac{r_i(x)}{r_i(a_i)}$ donde $r_i(a_i)\neq 0$

como $t(a_i)=g(a_i)$ existe un $\alpha\in$(a,b) tal que $t^{(n-1}(\alpha)=g^{(n-1}(\alpha)$

es decir $$t^{(n-1}(\alpha)=D^{n-1}\left(\sum g(a_i)\frac{\prod_j (p(x)-p(a_j))}{\prod_{j(i\neq j)}(p(a_i)-p(a_j))}\frac{r_i(x)}{r_i(a_i)}\right)(\alpha)=g^{(n-1}(\alpha)$$

**Corolario 8**. Si $t(x)=\Pi_i(p(x)-p(a_i))r_1(x)$ y $g(x)=\Pi_i(f(x)-f(a_i))r_2(x)$ como $t(a_i)=g(a_i)$ $\Rightarrow$ existe un $\alpha\in$(a,b) tal que $t^{(n-1}(\alpha)=g^{(n-1}(\alpha)$
$D^{(n-1}(\Pi_i(p(x)-p(a_i))r_1(x))(\alpha)=D^{(n-1}(\Pi_i(f(x)-f(a_i))r_2(x))(\alpha)$

Si n=2 y $r_i(x)=1$, da $(f(a)-\frac{(f(a_1)+f(a_2))}{2})f'(a)=(p(a)-\frac{(p(a_1)+p(a_2))}{2})p'(a)$

**Corolario 9**.Si $t(x)=\Pi_i(p(x)-p(a_i)).I_p(b_1,...,b_m)$ y $g(x)=\Pi_i(f(x)-f(a_i))I_{\mathcal{F}}(b_1,...,b_m)$ donde las I son funciones tales que hacen que $t(b_i)=g(b_i)$ para i desde 1 a m, entonces podemos encontrar un $\alpha\in$(a,b) tal que $t^{(n+m-1}(\alpha)=g^{(n+m-1}(\alpha)$.

**Teorema 8**. Si $p'(x)\neq 0$ $\forall x\in$(a,b) y $\mathcal{F}=1/p'(x)D$, siendo f(a)=g(a) y f(b)=g(b), entonces existe un $c\in$(a,b) tal que $\mathcal{F}$ (f)(c)= $\mathcal{F}$ (g)(c).
Dem : Por el teorema 1 existe un c tal que f'(c)=g'(c), dividiendo por p'(c) se obtiene el resultado.

**Corolario 1**. Si las funciones son (f(x)-f(a))(g(b)-g(a)) y (g(x)-g(a))(f(b)-f(a)) resulta un teorema de Cauchy para el operador $\mathcal{F}$, es decir existe un $c\in$(a, b) tal que $\mathcal{F}$ (f)(c)(g(b)-g(a))= $\mathcal{F}$ (g)(c).(f(b)-f(a)).

**Corolario 2**. Sean $a_1<a_2<..<a_n$ puntos de [a,b] para los que se

cumplen que $f(a_i)=g(a_i)$ $\forall i=1,...,n$ , entonces existe un punto c del intervalo (a,b) tal que $\mathcal{F}^{n-1}(f)(c)=\mathcal{F}^{n-1}(g)(c)$, siendo $\mathcal{F}=1/p'(x)$.

Dem : De $f(a_i)=g(a_i)$ (por el teorema 8) existe un $c_i\in(a_i, a_{i+1})$ $\forall i=1,..n-1$, tal que $\mathcal{F}(f)(c_i)=\mathcal{F}(g)(c_i)$, de donde, repitiendo el proceso, existe un punto $c\in(a, b)$ tal que $\mathcal{F}^{n-1}(f)(c)=\mathcal{F}^{(n-1}(g)(c)$.

**Corolario 3**. Si $f(x)=\Pi(p(x)-p(a_i))$ y $g(x)=\Pi(t(x)-t(a_i))$, existe un $c\in(a,b)$ tal que $n!p(c)-(n-1)!\Sigma p(a_i)=\mathcal{F}^{n-1}(g)(c)$ (sustituyendo f(x) por $f(x).r_1(x)$ y g(x) por $g(x).r_2(x)$, también es $\mathcal{F}^{n-1}(f)(c)=\mathcal{F}^{n-1}(g)(c)$).

**Corolario 4**. Si $$t(x)=\sum g(a_i)\frac{\prod_j (p(x)-p(a_j))}{\prod_{j(i\neq j)} (p(a_i)-p(a_j))}\frac{r_i(x)}{r_i(a_i)}$$ donde $r_i(a_i)\neq 0$

$t(a_i)=g(a_i)$ entonces existe un $c\in(a, b)$ tal que $\mathcal{F}^{n-1}(t)(c)=\mathcal{F}^{n-1}(g)(c)$

**Corolario 5**. (Generalización de un teorema de Peano (1884)).Sea h(x)=
$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & .... & f_n(x) \\ f_1(a_1) & f_2(a_1) & .... & f_n(a_1) \\ ... & ... & ... & ... \\ f_1(a_{n-1}) & f_2(a_{n-1}) & ... & f_n(a_{n-1}) \end{vmatrix}$$
entonces $h(a_i)=0$ para i=1,2,..,n-1
y sea t(x) con igual definición, sustituyendo las funciones f por las g; de aquí, $t(a_i)=0$ y, por el corolario 2, existe un punto c de (a, b), tal que $\mathcal{F}^{n-2}(h)(c)=\mathcal{F}^{n-2}(t)(c)$.

**Corolario 6**. Si $p'(x)\neq 0$ en (a, b). Sean $a_1<..<a_n$ puntos de [a ,b], y sean $g_1,..,g_n$ funciones continuas en p([a, b]) y de clase $C^{(n-1}$ en el interior de p([a, b]), tales que cumplen la condición de Haar para los puntos $p(a_1),...,p(a_n)$. Entonces existe una única combinación lineal de $g_1(p(x)),...,g_n(p(x))$ de coeficientes $\beta_1,..,\beta_n$ que coincide con f(x) en $a_1,..,a_n$, y un $\alpha$ central a $a_1,..,a_n$ tal que $\mathcal{F}^{(n-1}(f)(\alpha)=\beta_1 g_1^{(n-1}(p(\alpha))+\beta_2 g_2(p(\alpha))+...+\beta_n g_n(p(\alpha))$

Dem:

Construimos h(x) como el determinante formado por las funciones f(x), $g_1(p(x)),....,g_n(p(x))$ evaluadas en x, $a_1,..,a_n$. Está claro que h(x) se anula en $a_1,..,a_n$ por lo que existe un $\alpha$ central tal que $\mathcal{F}^{n-1}(h)(\alpha)=0$.