GEOMETRÍA MÉTRICA EN UN TETRAEDRO

Manuel Díaz Regueiro
Instituto de Bachillerato "Juan Montes". Lugo.

Boletín das Ciencias de Enciga. nº 3. Xuño de 1989.

Si v_1 y v_2 son dos vectores ortogonales en el espacio por el Teorema de Pitágoras se cumple que:

$|v_1 + v_2|^2=|v_1|^2+|v_2|^2$ (1)

$|v_1 - v_2|^2=|v_1|^2+|v_2|^2$ (2)

1) Relación métrica entre las caras de un tetraedro que tenga un triedro trirrectángulo.

Si Δ_1, Δ_2, Δ_3, son las áreas de los triángulos rectángulos del tetraedro y Δ_4 el área de la otra cara se cumple que $\Delta^2_1+\Delta^2_2+\Delta^2_3=\Delta^2_4$

A las aristas del tetraedro le asociamos los vectores v_1 , v_2 ,v_3 (formando el triedro trirrectángulo) y $v_3 - v_1$, $v_3 - v_2$, $v_2 - v_1$

(ver figura 1)

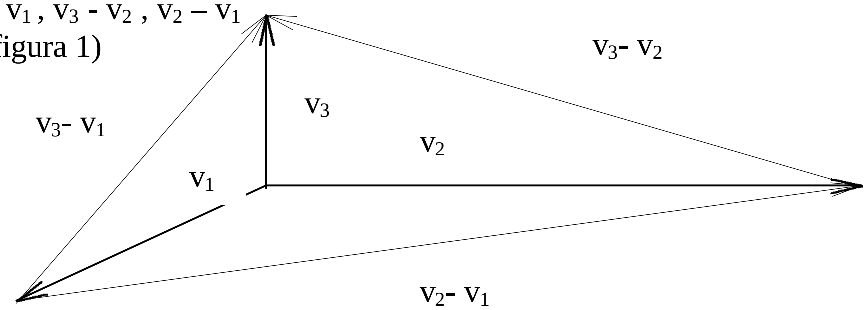


FIGURA 1: $\mathbf{\Delta^2_1+\Delta^2_2+\Delta^2_3=\Delta^2_4}$

Relación entre las áreas de las caras de un tetraedro con un triedro trirrectángulo.

Para probarlo tenemos que, (siendo x el producto vectorial):

$|v_3 \times v_2|^2+|v_1 \times v_2|^2=|v_3 \times v_2 - v_1 \times v_2|^2$ por (2) ya que $v_3 \times v_2$ y $v_1 \times v_2$ son dos vectores ortogonales.

$|v_3 \times v_2 - v_1 \times v_2|^2+|v_3 \times v_1|^2=|v_3 \times v_2 - v_1 \times v_2 - v_3 \times v_1|^2=|(v_3-v_1)\times(v_2-v_1)|^2$

puesto que $v_1 \times v_1=\mathbf{0}$ y que $v_3 \times v_1$ y $v_3 \times v_2 - v_1 \times v_2$ son dos vectores ortogonales; con lo cual

$|(v_3-v_1)\times(v_2-v_1)|^2=|v_3 \times v_2|^2+|v_1 \times v_2|^2+|v_3 \times v_1|^2$

Dividiendo por 4 esta igualdad y teniendo en cuenta, que $\Delta_1=|v_1 \times v_2|/2$

$$\Delta_2=|v_3 \times v_1|/2$$
$$\Delta_3=|v_3 \times v_2|/2$$
$$\Delta_4=|(v_3-v_1)\times(v_2-v_1)|/2$$

obtenemos

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2+\Delta^2_3=\Delta^2_4$$

2) Relación métrica entre las caras de un tetraedro con dos diedros rectos cuyas aristas no se corten en un vértice (o que no tengan un plano en común):

Siendo Δ_1, Δ_2, las áreas de las caras que forman un diedro recto, y Δ_3, Δ_4 las del otro se cumple que:

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2=\Delta^2_3+\Delta^2_4$$

Para probarlo, en un tetraedro con esas características colocamos en sus aristas los vectores v_1 , v_2 ,v_3 , $v_2 - v_3$, $v_2 - v_1$, $v_1 - v_3$ (ver figura 2), suponiendo que un diedro recto es el que forma el plano que contiene a los vectores v_2 y v_3, y el plano que contiene a los vectores $v_2 – v_3$, y $v_1 – v_3$. El otro diedro recto es el formado por el plano que contiene v_1 y v_2 y por el plano que contiene a v_1 y v_3.

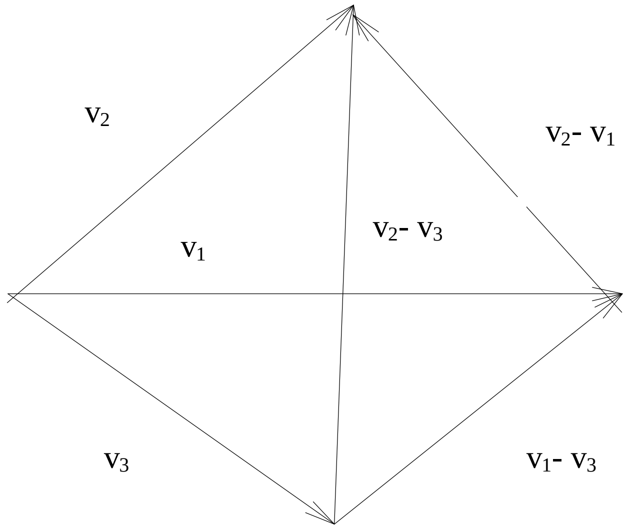


FIGURA 2: $\Delta^2_1+ \Delta^2_2= \Delta^2_3+\Delta^2_4$

Relación entre las áreas de un tetraedro con dos diedros rectos sin plano común.
Entonces,
$| (v_2 –v_3)x(v_1 – v_3)|^2+| v_2 \text{ x } v_3 |^2=| (v_2 –v_3)x(v_1 – v_3)+v_2 \text{ x } v_3 |^2$ por (1)
$=| v_2 \text{ x } v_1 – v_3 \text{ x } v_1- v_2 \text{ x } v_3 + v_2 \text{ x } v_3|^2 = | v_2 \text{ x } v_1 – v_3 \text{ x } v_1|^2= | v_2 \text{ x } v_1|^2 + | v_3 \text{ x } v_1|^2$

por (2). Dividiendo la igualdad $| (v_2 –v_3)x(v_1 – v_3)|^2+| v_2 \text{ x } v_3 |^2=| v_2 \text{ x } v_1|^2 + | v_3 \text{ x } v_1|^2$ por 4 obtenemos

$$\Delta^2_1+ \Delta^2_2= \Delta^2_3+\Delta^2_4$$

3) En un tetraedro ABCD, que tenga un triedro trirrectángulo en B, trazamos un plano que pase por una de las aristas (BC) del triedro trirrectángulo y sea perpendicular a la cara opuesta a dicho triedro (ADC). Ese plano seccionará al tetraedro en dos (ABCE y BCDE). Sean K, L, M, N, P las áreas de BCE, ABE, BDE, AEC, ECD (ver figura 3) se cumple que K^2 =PN-LM.

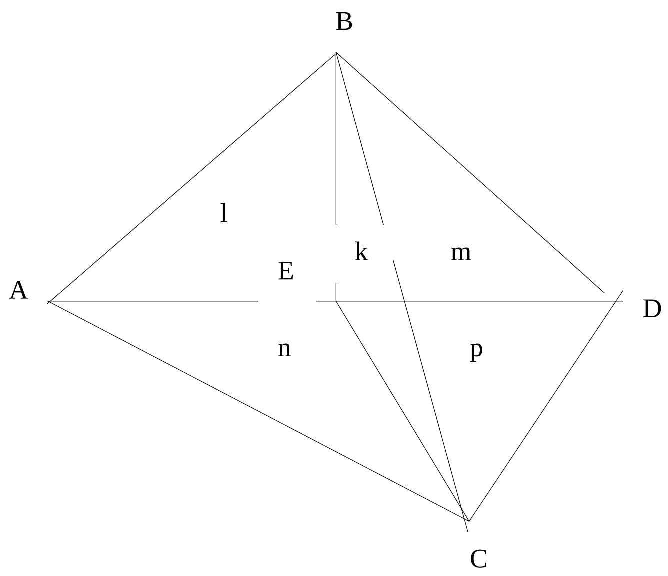


FIGURA 3: $\mathbf{K^2 = PN\text{-}LM.}$
Traducción del teorema de la altura a un tetraedro

A los tetraedros ABCE y BCDE se les puede aplicar la proposición 2, por lo que, si Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 son las áreas de ABC, ABD, ACD, BCD, tenemos,

$$\Delta_1^2+L^2=K^2+N^2$$

y $\Delta_2^2+M^2=K^2+P^2$

por la proposición 1 tenemos

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2+\Delta^2_3=\Delta^2_4$$

además de Δ_3=L+M y Δ_4=N+P. De aquí

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2=(N+P)^2-(L+M)^2$$

$$\Delta^2_1+\Delta^2_2=N^2+K^2-L^2+K^2+P^2-M^2$$

$$2K^2-2PN+2LM=0$$ es decir, $K^2=PN-LM$.

4). En el tetraedro ABCD de la figura anterior se verifica:

$$\boldsymbol{\Delta^2_1=N\,\Delta_4-L\,\Delta_3}$$

Utilizando las ecuaciones $\Delta_1^2+L^2=K^2+N^2$
y K^2= PN-LM se obtiene

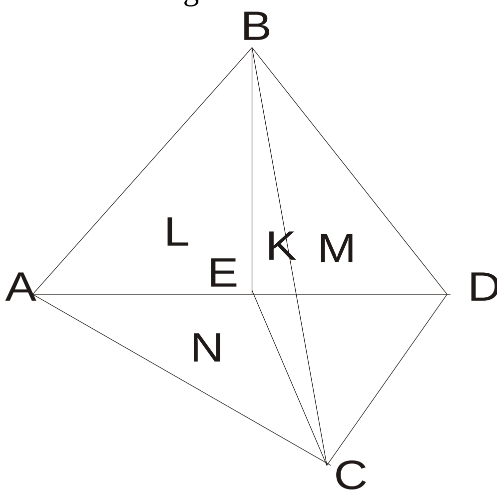
$$\Delta_1^2+L^2=PN-LM+N^2$$

de aquí, $\Delta_1^2=N(P+N)-L(L+M)$, luego $\boldsymbol{\Delta^2_1=N\,\Delta_4-L\,\Delta_3}$.

5) En un tetraedro ABCD con dos diedros rectos no contiguos (ver figura 4) de aristas las rectas BC y AD respectivamente, y tales que esas rectas tengan sus vectores de dirección ortogonales, si trazamos por BC un plano perpendicular a la cara ADC, el área K de la sección que determina dicho plano verifica K^2=LM+NP siendo L, M y N, P las áreas de los triángulos en que el plano divide a las caras ABD y ADC, respectivamente.

FIGURA 4: $\mathbf{K^2 = PN + LM}$

Otra versión del teorema de la altura. Los diedros de aristas AD y BC son rectos y AD y BC son vectores ortogonales.



Para probarlo, teniendo en cuenta que los tetraedros ABCE y BDCE tienen triedros trirrectángulos con vértice en E, llamando al área de ABD=Δ_1, área de ADC=Δ_2 , área de ABC=Δ_3 ,área de BDC=Δ_4, se cumple

que $\Delta^2_1+ \Delta^2_2= \Delta^2_3+\Delta^2_4$

y que $\Delta^2_3= K^2+ L^2+ N^2$

$\Delta^2_4= K^2+ M^2+ P^2$

de aquí, como Δ_2=N+P y Δ_1 =L+M,

$\Delta^2_3+\Delta^2_4= K^2+ L^2+ N^2 +K^2+ M^2+ P^2$

$\Delta^2_3+\Delta^2_4= L^2+ M^2+2LM+ N^2 + P^2+ 2NP$

restando $2 K^2 -2LM-2NP =0$, es decir $\mathbf{K^2= LM+NP}$

6) En el tetraedro ABCD de la proposición anterior, se cumple que:

$\mathbf{\Delta^2_3= L\Delta_1 +N\Delta_2}$

Demostración: $\Delta^2_3= K^2+ L^2+ N^2$, como K^2=LM+NP, Δ^2_3=LM+NP+ $L^2+ N^2$ =L (M+L) +N (N+P) =$L\Delta_1 +N\Delta_2$

Por último, para completar el estudio de las área de las de un tetraedro, se demuestra:

a) (Carnot) En un tetraedro se cumple que:

$$\mathbf{\Delta^2_1= \Delta^2_2+ \Delta^2_3+\Delta^2_4-2\Delta_2\Delta_3 \cos \alpha_{23}-2\Delta_2\Delta_4 \cos \alpha_{24}-2\Delta_3\Delta_4 \cos \alpha_{34}}$$

siendo(por ejemplo) α_{34} el ángulo del diedro que forman las caras 3 y 4.

b) En cualquier tetraedro se cumple que:

$$\mathbf{\Delta^2_1+ \Delta^2_2-2\Delta_1\Delta_2 \cos \alpha_{12}=\Delta^2_1= \Delta^2_3+\Delta^2_4-2\Delta_3\Delta_4 \cos \alpha_{34}}$$

En primer lugar, definimos que un vector ortogonal a una de caras de un diedro tiene sentido hacia el exterior del diedro colocado su origen en cualquier punto de esa cara (a la cual ortogonal) su extremo no cae en la zona del espacio interior del diedro. Ese vector ortogonal, en otro caso, diremos que tiene sentido orientado hacia el interior del diedro.

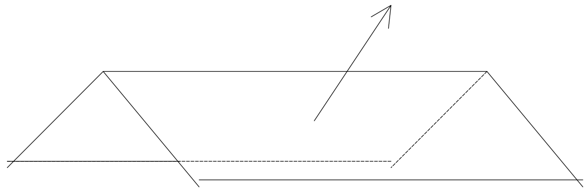


FIGURA 5: Vector ortogonal a una de las caras del diedro y con orientación hacia el exterior.

Definimos el ángulo de un diedro como el ángulo de dos vectores asociados u ortogonales a cada uno de los planos del diedro y sentido u orientación a semiespacios (de los que divide el diedro al espacio) distintos.

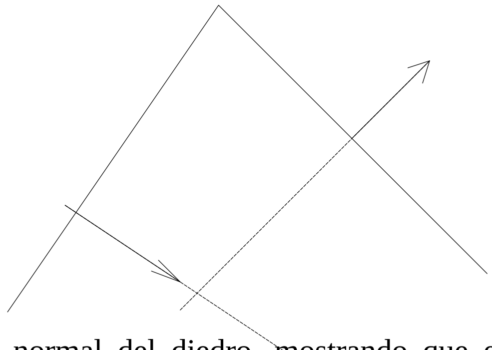


FIGURA 6: Sección normal del diedro, mostrando que el ángulo diedro es idéntico al que forman los vectores asociados a planos, uno interior y otro exterior al diedro.

Ángulo de un diedro definido por tres vectores:

Dados tres vectores v_1, v_2, v_3 inscritos en un diedro de forma que v_1 y v_3 están en caras distintas del diedro y v_3 está en la recta arista, y los tres vectores tengan un origen común, v_1x v_2 es un vector ortogonal a uno de los planos. Si está orientado hacia el exterior del diedro, entonces $v_1xv_2.v_3$ es negativo puesto que el ángulo que forman esos dos vectores es mayor de 90^o y positivo en caso contrario. En cualquier caso, v_3xv_2 ha de tener sentido opuesto hacia el diedro que el de v_1xv_2, puesto que $(v_3xv_2).v_1=-(v_1xv_2).v_3$, es decir, si suponemos que $(v_1xv_2).v_3$ es positivo, v_1xv_2 está orientado hacia el interior del diedro porque forma un ángulo menor o igual a 90^o con v_3, pero v_3xv_2 formará ángulo mayor de 90^o con v_1 luego deberá tener sentido hacia exterior del diedro.

En resumen v_1xv_2 y v_3xv_2 tienen sentido opuesto respecto al diedro y permiten definir el ángulo que forma el diedro como el ángulo que forman v_1xv_2 y v_3xv_2.

Instalemos en el tetraedro los vectores v_1 , v_2 ,v_3 , $v_3 – v_1$, $v_2 – v_1$ y $v_2 – v_3$.

El área $\Delta_1=|v_3 \text{ x } v_2|/2$

$\Delta_2=|v_1 \text{ x } v_2|/2$

$\Delta_3=|v_3 \text{ x } v_1|/2$

$\Delta_4=|(v_3-v_1)\text{x}(v_2-v_1)|/2$

el ángulo diedro α_{12} es igual al ángulo que forman los vectores v_3 x v_2 y v_1 x v_2

el ángulo diedro α_{13} es el ángulo que forman los vectores v_3 x v_1 y v_3 x v_2. Por último, α_{14} lo forman los vectores v_3 x v_2 y $(v_3-v_1)\text{x}(v_2-v_1)$, ya que v_3 x v_2 tendrá un sentido u otro respecto al diedro de arista

v_3 -v_2 dependiendo del signo de $v_1 .(v_3 \text{ x } v_2)$ y el sentido respecto al mismo diedro de $(v_3-v_1)\text{x}(v_2-v_1)$, depende del valor del producto escalar - $v_1 . ((v_3-v_1)\text{x}(v_2-v_1))$ (- v_1 es un vector con el

mismo origen que $(v_3 - v_1)$ y $(v_2 - v_1)$), que es igual a $-v_1 .(v_3 \times v_2)$, es decir tiene signo opuesto al anterior, por lo que esos dos vectores tienen sentido opuesto respecto al diedro.
Entonces, de la igualdad vectorial
$v_3 \times v_2=(v_3 - v_1)\times(v_2 - v_1)+ v_3 \times v_1+ v_1 \times v_2$
Si multiplicamos escalarmente por $v_3 \times v_2$ la igualdad y dividimos por 4
obtenemos
$\Delta^2_1= \Delta_1\Delta_4 \cos \alpha_{14}+\Delta_1\Delta_2 \cos \alpha_{12}+\Delta_1\Delta_3 \cos \alpha_{13}$
de igual forma se obtienen
$\Delta^2_2= \Delta_2\Delta_4 \cos \alpha_{24}+\Delta_1\Delta_2 \cos \alpha_{12}+\Delta_2\Delta_3 \cos \alpha_{23}$
$\Delta^2_3= \Delta_3\Delta_4 \cos \alpha_{34}+\Delta_3\Delta_2 \cos \alpha_{32}+\Delta_1\Delta_3 \cos \alpha_{13}$
$\Delta^2_4= \Delta_1\Delta_4 \cos \alpha_{14}+\Delta_4\Delta_2 \cos \alpha_{42}+\Delta_4\Delta_3 \cos \alpha_{43}$
que sustituidos en a) y b) demuestran estos dos resultados.

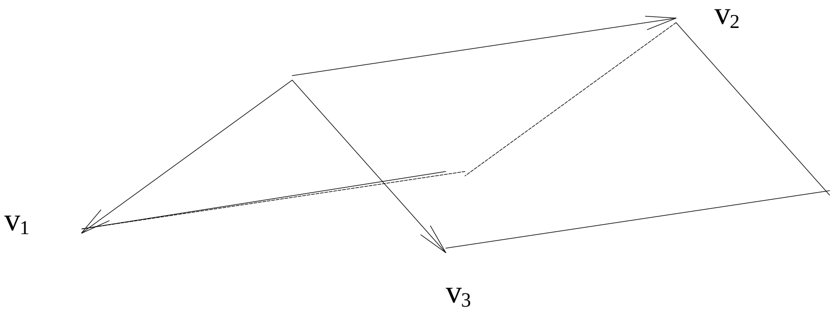


Figura 7: Diedro definido por tres vectores.

Bibliografía

Geometría métrica en un simplex de R^n. Manuel Díaz Regueiro. Gaceta Matemática. Tomo XIII. Número 5-6. Madrid. 1981.
Géométrie de position. Lazare Carnot.1803.