ÁREAS E TRIÁNGULOS: CREANDO TEOREMAS

Manuel Díaz Regueiro
IES Xoán Montes

Resumo

Trátase de crear múltiples "teoremas" respecto ao triángulo utilizando Derive, ou outra ferramenta de cálculo simbólico. Dun só novo tipo de problemas. Dado un triángulo, creamos outro (por algunha regra) e buscamos se a razón das áreas dos dous triángulos é independente do triángulo orixinal. A tese é que o poden facer os rapaces se usan... tecnoloxía.

Abstract

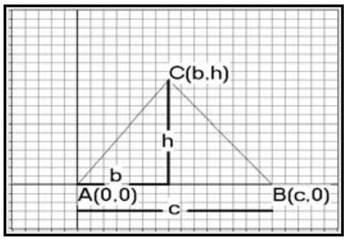
I try to create several "theorems" about the triangle, using Derive, or another tool of symbolic algebra. Of an new unique type of problems. Given an triangle, we create another derivated (by some rule) and we search if the reason of areas of the two triangles is independent of the original triangle. The thesis is that the pupils can do it using… technology.

Este é un artigo que ten moito que ocultar[1] porque o número de resultados é xa quizais excesivo e os medios que se usan son impresentables (no sentido de número excesivo de páxinas resultado de cálculos en programas de cálculo simbólico como *Derive*).

O campo da xeometría do triángulo foi un campo fértil no XIX, aínda que Jacob Steiner consideraba a xeometría analítica unha "muleta para espíritos menos dotados". Hoxe é unha curiosidade da que se dan algunhas nocións en Secundaria, e algúns exercicios coa Xeometría Analítica.

O que se presenta é un traballo do que aborrecería Steiner, xa que non só usa as muletas desa xeometría, senón que usa as muletas do cálculo simbólico. Pero, no seu conxunto, e na maioría dos resultados, non existiría este artigo sen esas muletas. A capacidade humana, e aínda a de Steiner o foi, é limitada. Os cálculos que levan a intuicións son moi limitados se non usamos as posibilidades tecnolóxicas das que actualmente dispoñemos.

Algunhas maneiras de construír un triángulo en función de outro dado



Queremos calcular un triángulo *A'B'C'* en función de un dado *ABC* seguindo unhas regras. Vexamos exemplos.

1.

(1a) Trazar as paralelas aos lados polos vértices. Os puntos de corte darannos o triángulo transformado.

(1b) Unir os puntos medios dos lados. O triángulo transformado ten eses vértices.

(1c) Trazar as perpendiculares aos lados polos vértices opostos. Os puntos de corte conformarán o triángulo transformado.

(1d) Por homotecia ou semellanza de triángulos. Sabemos neste caso que a razón de as áreas é k^2, sendo k a razón de semellanza.

2. Dados tríos de puntos especiais:

[1] Como dicía Gauss despois de construír hai que retirar os andamios. Neste caso os andamios, os listados de *Derive*, son 100 veces o edificio, non deixarían ver o bosque nin o edificio. De feito, é posible que o artigo teña algún erro dado ese efecto "bosque".

(2a) Puntos de corte das alturas co lado oposto a cada vértice (triángulo órtico). É o mesmo que (1c).

(2b) Puntos de corte das tres bisectrices dun ángulo co lado oposto a ese ángulo.

(2c) Puntos dados polo triángulo de Morley.

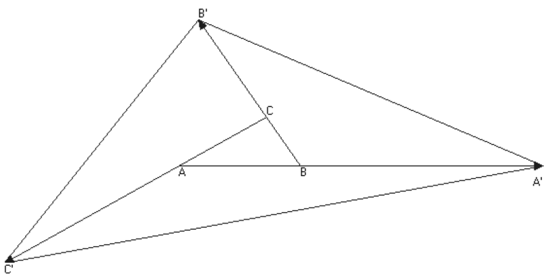
(2d) Puntos de corte de tres cevianas.

...

3. Transformacións dos vértices a través de vértices.

(3a) Chamo triángulo *n*-simétrico de outro a aquel en que cada vértice (*A*) se transforma nun punto, A’, que cumpre que AA’=nAB. Cando falemos de simétricos podemos entender, de modo xeral, *n*-simétricos.

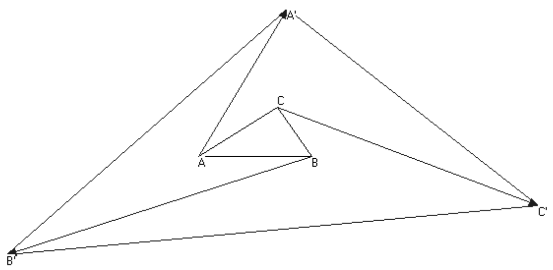
(3b) Só transformamos así dous (ou un) vértices e o terceiro queda sen transformar.



n-simetría dun triángulo, neste caso, *n* = 3, *R* = 19 (S(*A’B’C’*)=19·S(*A*,*B*,*C*)).

(3c) n1-simétricos AA’=nOB-OA.

(3d)Transformado combinación linear OA’=OB+nAB+mBC.



Transformación simétrica con *m* = -1, *n* = -2, *p* = 3. *R* = 21.

(3e) Simétrica OA’=mOA+nOB+pOC.

(3f) n2-simétricos AA’=nBA.

(3g) np1-simetrico OA’=nOB-pOA.

(3h) np-simétrico OA’=(n+p)OB-nOA.

...

4. Dado un punto calquera...

(4a) Puntos simétricos do punto respecto aos vértices ABC.

(4b) Simétricos dos vértices respecto ao punto.

(4c) Simétricos respecto aos lados.

(4d) Corte perpendicular cos lados.

(4e) Paralelas desde o punto aos lados (e puntos de corte con outro dos lados). Aquí aparecen varias posibilidades e varias maneiras de obter un transformado. De todas formas podemos entender que a maneira canónica é facer sempre a recta paralela seguindo a mesma orde e de modo simétrico respecto aos lados.

Notación que usaremos de aquí en diante

Vamos aproveitar estes exemplos e denominar as transformacións pola orde en que están descritas, así a (3a) é *n*-simétrico...

Sen perder xeneralidade podemos supor que A está na orixe de coordenadas, B no punto (c,0) e C no punto (b,h). Isto facilita que as expresións alxébricas resultantes sexan máis sinxelas. Partimos, polo tanto, para simplificar os cálculos, de supor A(0,0), B(c,0) e C(b,h) (aquí o b non ten que ver coa medida do lado b; c si que é a medida do lado c). h é a altura desde C. A Área(A,B,C) = ch/2, se ben nas razóns omitiremos o “2” común ás áreas e dividiremos simplemente por ch.

O obxectivo

Todo isto está moi ben, pero que queremos facer?... Queremos achar a razón das áreas do triángulo transformado ao orixinal... R = S(A’B’C’)/S(ABC).

Dito así non resulta moi interesante, e é unha pregunta demasiado aberta, pero é que en realidade buscamos...

Teoremas *exactos* e *express*

Que a razón sexa un número, independente polo tanto dos puntos orixinais ABC. Hai precedentes? Na transformación (1a) todos sabemos que é 4 e na (1b), R=1/4. Na (1d), R=k^2 (en xeral, R=determinante da transformación afín). Se para unha transformación dada non existe ese número podemos buscar que pasa se o triángulo orixinal é a) rectángulo, b) isósceles, c) equilátero. Se nestes casos R é un número tamén nos interesa...

Por que *express*? Porque o que obteremos a través da xeometría analítica e o cálculo simbólico é ese número. Se o resultado é un número xa estará demostrado que non depende do triángulo orixinal... Observaremos que ao calcular o determinante da área de A'B'C' resulta *número*·ch. Entón, R = *número*.

Composición de transformacións

Ademais temos unha axuda para multiplicar os resultados que ven dada por esta proposición:

As transformacións admiten a composición de aplicacións usual, pero ademais, se son *exactas* no sentido anterior a súa composición dará lugar a outra transformación *exacta*, xa que

$$R_{T_1 o T_2} = \frac{S_{T_1 o T_2}}{SO} = \frac{S_{T_1 o T_2}}{S_{T_2}} \frac{S_{T_2}}{SO}$$

onde SO é a área do triángulo orixinal ABC, S_{T_2} é a área do triángulo transformado por T_2 e $S_{T_1 \circ T_2}$ é a área do transformado pola composición de T_1 e T_2.

Agora ben, T_1 é *exacta* así que aplicada a calquera triángulo a razón é sempre a mesma polo que

$$R_{T_1} = \frac{S_{T_1}}{SO} = \frac{S_{T_1 \circ T_2}}{S_{T_2}}$$

e o segundo factor é así que obteremos $R_{T_1 \circ T_2} = R_{T_1} * R_{T_2}$. A composición de T_1 e T_2 é *exacta* e ademais sabemos que a súa razón é o produto das razóns... A inversa de T, de razón R, é *exacta* e ten razón 1/R. Forman grupo. O elemento neutro é a identidade.

Incluso máis axuda... hai resultados xerais, para calquera punto P(x,y)...

(I) Dado un punto calquera do plano se calculamos os simétricos dese punto respecto a os puntos medios dos lados do triángulo a razón resultante é R=1/4. *n*-simétricos, R = $(n-1)^2/4$. n1-simétricos R=1/4.

(II) Dado un punto calquera do plano se calculamos os simétricos dos puntos medios dos lados do triángulo respecto a ese punto a razón é R=1. *n*-simétricos, R = $n^2/4$. n1-simétricos R = $n^2/4$.

(III) Simétricos respecto aos vértices do triángulo órtico, se ABC é rectángulo:
R = $-(x^2-xc-y(h-y))/(c^2+h^2)$

(IV) Simétrico respecto aos vértices dese punto R=4. *n*-simétricos R=n^2. n1-simétricos R= n^2 (na táboa este caso será G_{IV}).

(V) Simétricos dos vértices con centro ese punto R=1 (na táboa este caso será G_V). *n*-Simétricos R=$(n-1)^2$ (se ademais facemos C'=A, R=n(*n*-1)). n1-simétricos R=1 (se ademais facemos C'=A, R=n).

(VI) Se transformamos por simetría respecto a P os vértices B e C, pero A(0,0) o levamos a (2x,2h). Se o triángulo é rectángulo en B (b=c) R=1.

(VII) Aplicamos transformacións (4e) a un punto P(x,y). Para triángulos rectángulos poden dar razóns como x^2/c^2, y^2/h^2, $(c^2y^2+h^2x^2)/(c^2h^2)$, $((cy+hx)/(ch))^2$, xych ou 2xych.

(VIII) Perpendiculares aos lados. Se ABC rectángulo R= $(x^2 - cx + y(y - h))/(c^2+h^2)$. Así que o lugar xeométrico dos puntos do plano que ao trazar os pés das perpendiculares sobre un triángulo rectángulo forman un triángulo de razón k é unha elipse de ecuación $x^2 - cx + y(y - h))=k(c^2+h^2)$. Con ABC equilátero:
3(3 x - 3 c x + y(3 y - c)) /4c ·

Claves ou explicación para outros casos, é dicir, a calquera resultado da táboa que vén a continuación se lle aplicamos esas transformacións a R virá multiplicada polos números anteriores. Ademais, está claro polos numerosos exemplos, quizais excesivos, que son unha mostra pequena do que é posible imaxinar.

Explicación para as transformacións 3.

Dado un punto P o *n*-simétrico respecto a Q será OT=OP+nQP. Dada calquera polígono e o transformado pola n-simetría dun punto P con centro cada vez un vértice é sinxelo probar que a área do transformado respecto ao orixinal é n^2. Se a n-simetría ten de centro un punto (x,y) calquera, o transformado dun polígono ten $R=(n-1)^2$ (ideas facilmente trasladables a R^m). Tamén a transformación consecutiva: *Centro*=cada punto consecutivo se calcula o n-simétrico respecto ao anterior dos tres puntos, seguindo unha orde. Os puntos transformados son o resultado de multiplicar o vector do lado do triángulo por n (A'=A+nAB), a razón das áreas é $3n^2-3n+1$ (polinomio ligado aos números hexagonais). Para n=2 fai aparecer un 7.

Definimos ***NSIM(U, V) := n·(V - U) + U***, e o aplicamos aos tres vértices sucesivamente de dous en dous, AB, BC, e CA. Se só transformamos dous puntos do triángulo deste xeito a razón é n^2. Nun tetraedro, a razón dos volumes así transformados dá $4n^3-6n^2+4n-1$. Nun símplex de 4 dimensións: $5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1$, en 5 dimensións: $6n^5 - 15n^4 + 20n^3 - 15n^2 + 6n - 1$, etc. aínda que podemos ver que son iguais a $(n-1)^{d+1} - n^{d+1}$, onde d = dimensión do símplex. Para un cuadrilátero a razón das áreas é $2n^2+2n+1$, para un polígono calquera a razón é f(n) sendo f un polinomio de segundo grao. Cal?...

Para a n1-simetría, con d=2 vimos que era $R=n^2+n+1$ (definimos ***n1sim(u, v) := n·u - v***, e o aplicamos a AB, BC e CA) . Se d=3, $R= n^3+n^2+n+1$, en xeral o polinomio ciclotómico $R=(n^{d+1}-1)/(n-1)$. Para a n2-simetría $(n+1)^{d+1}- n^{d+1}$. Para a np1, $R=(n^{d+1}-p^{d+1})/(n-p)$... Para a np, $R=((n+p)^{d+1}-n^{d+1})/p$. Se conservamos 1, 2, 3... puntos...

A transformación (3d), combinación linear, dá $R= 3m^2 + 3m(n -1) + 3n^2 - 3n + 1$

(definimos ***cl(u, v, w):= u + n·(v - u) + m·(w - u)*** e o aplicamos aos tres vértices ABC, BCA e CAB).

A transformación (3e) dá $R= m^2 - m(n + p) + n^2 - np + p^2$ (definimos ***simet(u,v,w):=mu+nv+pw*** e o aplicamos a ABC, BCA, e CAB). Se facemos unha n-simetría como describimos antes pero con parámetros distintos k, l, m cada vez que a aplicamos, a razón é $R=k·(l + m - 1) + (l - 1)·(m - 1) = kl+km+lm-k-m-l+1$

Para unha n1-simetría R=kl+k +1. Se invertemos a orde (CB, BA, AC), $R=m^2+m+1$. Na (3e) ou na n-simetría se invertemos a orde, R é a mesma. Se na (3e) os parámetros son distintos para cada punto A, B, C, ... En d dimensións... No problema inverso, queremos saber dada a R que transformación vectorial a produce...

As TIC na Didáctica das Matemáticas

A idea que se quere transmitir neste artigo é a pregunta de que se nós debemos ensinar aos nosos alumnos de Bacharelato para que saiban dividir ben sen calculadora ou a demostrar e inventar teoremas con *Derive*. A verdade é que todos sabemos que os alumnos ben dotados, ben ensinados, teñen o seu máximo de potencial nesas idades de Bacharelato e primeiros anos da Facultade. O que propoño é algo que pode facer perfectamente un alumno de Bacharelato, máis que con *Derive*, con imaxinación. A ferramenta, a calculadora, *Derive*, non é o importante. Atopar novos vieiros de resolución de problemas actuais, e facer voar o pensamento dos rapaces, facelos voar nun mundo que se aproxima ao que será o seu, si o é.

Algúns alumnos collen a vocación de estudar matemáticas por que son premiados en concursos. A verdade é que cada vez menos. Hai outro tipo de vocación que se crea pola afección a resolver problemas difíciles. Sen que, ao revés do que pensan outros, esteamos obrigados a levar alumnos á Facultade, si que cumpriría lograr o obxectivo de que certos alumnos conseguisen facer demostracións elementais complexas, entendesen que é iso de demostrar, e aínda acadasen novos teoremas sinxelos. Un camiño posible para ese obxectivo é a utilización da tecnoloxía. Que, ademais, ten outras vantaxes que non imos comentar agora, xa que nos centraremos neste obxectivo: Facilitar que os alumnos (e tamén o profesor, por que non?) experimenten o pracer da demostración e o descubrimento por eles mesmos. Haberá quen discuta se esa demostración é válida, xa que non está feita con lapis e papel,... pero é reproducible. Calquera, seguindo os pasos propostos e utilizando os mesmos instrumentos, chega a mesma solución. Algúns dos resultados acadados son, pese a elementalidade dos mesmos, imposibles de conseguir con lapis e papel, razón pola cal podemos ter certa certeza da súa novidade. Ou ben impublicables. Hoxe en día, ningunha revista publicaría 30 páxinas de fórmulas de xeometría analítica que demostren un resultado sinxelo.

Preguntábase Sarmiento (2001) nun artigo de GAMMA [5] se sería posible facer matemáticas cos alumnos descubrindo resultados matemáticos reais (novos). Estamos dando un exemplo disto no que estamos a describir:

Transformando triángulos en triángulos. Dado un triángulo ABC damos unha determinada regra pola que poidamos deducir univocamente outro triángulo A'B'C' (xeralmente utilizando puntos ou rectas notables do triángulo orixinal) . Queremos saber que pasa coa razón das áreas dos dous triángulos. Os "teoremas" que buscamos han ser ou ben unha relación constante das áreas ou ben os límites entre os que se move a razón das áreas, ou ben casos especiais (en particular, caracterizacións de triángulos rectángulos).

Para isto, podemos utilizar múltiples ferramentas como *Cabri* ou ben *Lugares*, o II Premio Galicia, para visualizar os triángulos, ben *Derive* para calcular as funcións resultantes, ou ben *Cocoa*, *Mathlab*, *Mathematica* ou *Mapple*. De todas maneiras, o que se conta está feito con *Derive*. O que está claro é que despois de facer estes exercicios de descubrimento os alumnos han saber manexar os instrumentos informáticos nun contexto real, actual, ao mesmo tempo que aprenden matemáticas reais, non sucedáneas, como pretenden algúns, considerando aos nosos alumnos como algo atrasados. De feito tal tipo de busca é a clave en certos teoremas como o de Menelao e Ceva, sendo noutros casos resultados evidentes como o transformado polos puntos medios dos lados. Ou ben son algún tipo de exercicios usuais (como figuras inscritibles en progresións xeométricas).

Tamén, en conxunto, os resultados que se presentan forman unha batería de exercicios de xeometría analítica, por un lado, e unha fonte de reflexión (agora si dándolle a razón a Steiner), sobre o porqué dos resultados. Pero imos a eles...

Pero, como se fai? Algúns exemplos

Definimos (en *Derive*) ***NSPRPV(v, p) := n·(p - v) + v***; ***SPRPV(v, p) := 2·p – v*** (simétrico de punto respecto a punto con vectores); ***N1SPRPV(v, p) := n·p – v***. e definimos ***x:=[0,0]***, ***y:=[c,0]***, ***z:=[b,h]***.

· Transformación (3a). A' o calcularemos con ***NSPRPV(x, y)*** despois, (y,z) e (z,x).
Os resultados os poñemos no determinante ***det([[b·(1 - n), h·(1 - n),1],[b·n + c·(1 - n), h·n,1],[c·n, 0,1]])= -ch(3n^2-3n+1)***. A razón R=(3n^2-3n+1). Se fose n1-simétrico ***det([[c·n,0,1],[b·n - c, h·n,1],[-b, -h,1]]) = ch(n^2+n+1)***. Así R=(n^2+n+1).

· Só transformamos dous puntos ***NSPRPV(x, y)*** despois, (y,z) O terceiro punto é A. R=n^2. Se o terceiro é B, R=n^2-n. Se é C, R=(n-1)^2. Con n1-simétrico os tres casos serían R=1; R=2; R=n+2.

· Calculamos o ortocentro do triángulo. Dá (b, b(c - b)/h). Definimos así ***o:= [b, b·(c - b)/h]***. Calculamos ***SPRPV(x, o)***, despois (y,o) e (z,o).
Os resultados os colocamos no determinante (para o cálculo da área) ***det([[2·b, 2·b·(c - b)/h,1],[2·b - c, 2·b·(c - b)/h,1],[b, - (2·b^2 - 2·b·c + h^2)/h,1]])=ch***. Así a razón R=ch/(ch) (esquecemos os dous "2" que dividen, fórmula da área dun triángulo), R=1. Se fose n-simétrico R=(n-1)^2. Se fose n1-simétrico R=1. Cambiamos o papel do ortocentro e os vértices. É dicir, calculamos ***SPRPV(o, x)***, despois (o,y) e (o,z).
O determinante ***DET([-b, b·(b - c)/h, 1; 2·c - b, b·(b - c)/h, 1;b,(b^2-bc+2h^2)/h, 1])=4ch***. Logo R=4. Se fose n-simétrico R=n^2. Se fose n1-simétrico, R=n^2. Agora podemos pensar que perdemos o tempo xa que este caso é un caso particular do caso (IV), non é necesario que

sexa o ortocentro.

· Construímos o triángulo A', B', C' como o simétrico de cada punto respecto á recta que pasa polos outros puntos (así A' é o simétrico de A respecto á recta que pasa por B e C). Interésanos a función ***Área(A',B',C')/Área(A,B,C).***

Despois duns cantos cálculos con *Derive* resulta que ***Área(A',B',C')/Área(A,B,C)= (5·b^4 - 10·b^3·c + b^2·(5·c^2 + 2·h^2) - 2·b·c·h^2 - 3·h^2·(c^2 + h^2))/((b^2 + h^2)·(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2))***.

Se representamos esta función para un valor de c constante, obtense que é unha función que cando $h \to 0$ tende a 5 e cando $h \to \infty$ ten por límite –3, ten un mínimo de valor –4 (cando o triángulo cumpre que b=c/2, e é equilátero, senón un valor próximo a -4). En calquera caso o rango máximo da función é [-4,5) . Hai que salientar que eses límites non dependen de b (excepto no caso que veremos a continuación de triángulo rectángulo). E que o signo dependerá da orientación escollida, claro, xa que calculamos a área de A'B'C' usando o determinante dado polos puntos dese triángulo (rematando a matriz con uns como todos sabemos).

Se b=c, ou ben b=0, é dicir o triángulo é rectángulo, a razón é sempre –3 (basta para probalo con substituír na fórmula do cociente das áreas b e dá –3, o que se chama un "teorema *express*", non hai variación, a función da área é sempre constante). O recíproco non é tan *express*, pero tampouco difícil.

No triángulo órtico, deducido do ABC polos pes das alturas, a razón da área é ***2·h·(b^3 - 2·b^2·c + b·(c^2 + h^2) - c·h^2)/((b^2 + h^2)·(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2))***. Cando $h \to \infty$ o límite é 0. Cando $h \to 0$ o límite é 2. Evidentemente no caso de triángulos rectángulos non hai nada que dicir pois o triángulo órtico é un segmento (aínda que a razón das áreas é cero, é constante).

Para valores de b e c fixos, e 0<b<c a función pasa dende 2 a un valor mínimo próximo a 0 negativo para despois ir medrando paseniñamente ata o 0 no infinito. Noutro caso vai directamente desde 2 ata o 0. O rango, neste caso é (0,2).

Que pasa coas bisectrices? Agora a razón é algo tremebunda:

√(b^2 + h^2)·√(b^2 + h^2)·(√(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2) - 2·(b - c)) + √(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2)·(√(b^2 + h^2) + 2·(b - c)) - 2·b^2 + 4·b·c - 2·(c^2 + h^2))/((c - 2·b)·(√(b^2 + h^2) - c)·(√(b^2 - 2·b·c + c^2 + h^2) - 2·b + c))

Cando $h \to \infty$, tende a cero. Cando $h \to 0$, tende a ***2·(c - b)·ABS(b)·(ABS(b) + b - c)·(SIGN(b - c) - 1)/((2·b - c)·(ABS(b) - c)·(ABS(b - c) - 2·b + c))*** no que se b >= c >0 dá cero.

Se o triángulo é rectángulo temos o seguinte resultado. No caso b=c a razón vale 2d(d+c)(d-h)/ch(c-h) e no caso b=0 dá 2h(d-h)/c(c-h) (d aquí é a hipotenusa). Este exemplo proba que non sempre obtemos resultados interesantes.

Outro caso: No triángulo deducido de ABC, polos puntos medios dos lados, é sobradamente coñecido que a razón é 1/4. Se tomásemos en vez dos puntos medios, os puntos do tipo OA'=OA+AB/n ou OA+AB(n-1)/n as razóns serían $(n-1)/n^2$ ou $(n^2-3n+3)/n^2$ segundo o caso.

Tamén podemos definir o triángulo A'B'C' como o resultado das interseccións das rectas paralelas ao lado oposto pasando por cada punto. Neste caso a razón é sempre 4.

Hai que dicir que aquí os triángulos están en posición inversa do caso anterior.

Pero é que se definimos (ou inventamos a definición) que unha recta é a-paralela doutra se as pendentes se relacionan así m'= m+a, entón a razón das áreas dos triángulos relacionados por ese paralelismo (A'B'C' vén dado polos puntos de corte das rectas "paralelas" ao triángulo orixinal polos vértices) **segue sendo 4** (sorprendentemente independente do valor de a).

Realmente, moito mellor é facer a táboa seguinte.

TÁBOA 1

Centro ou relacionado con...	*Formado con...*	*Punto ou lado Simétrico respecto ao punto...*	*Punto ou lado Simétrico respecto ao lado...*
Baricentro	Puntos medios. R = 1/4 Puntos medios consecutivos = 7/4 composición de puntos medios e n-simétrico (n=2) consecutivo para eles (3a).	Vértice oposto. R = 1 (G_V) e R = 4 (G_{IV})	Lado oposto Perpendiculares desde o baricentro aos lados. Límites 2/9. **Rectángulos = -2/9 Equilátero 1/4**(2)
Incentro	Corte de bisectrices e lados. Formado con Lim inf=0.	Vértice oposto (G_V e G_{IV}). Formado por Incentro, Circuncentro, Ortocentro **(ICO)** **Rectángulos: (h-c)/2suma lados. Se IBC** **(h-c)/6suma lados** **OBC cero (están nunha recta). OIB (h-c)/3suma lados** **Equilátero 0**	Lado oposto. Perpendiculares desde o incentro aos lados. Límites 0.
Ortocentro	Corte de alturas e lados (triángulo órtico) Límites 0 e 2. **Equilátero R =1/4** n-simétrico con centro os puntos do triángulo órtico, respecto aos vértices opostos. Límites (n - 1)·(2·n + 1) e -(n+1) **Rectángulo R=n+1** **Equilátero** **R = $(n^2+4n+4)/4$**	Cada vértice respecto ao ortocentro R =1 (G_V). Ortocentro respecto a cada vértice R = 4 (G_{IV}). n-simétrico cada pé da perpendicular respecto vértice seguinte (sen importar a orde). **Rectángulos (b=c)$n(nc^2+(n-1)h^2)/(c^2+h^2)$** **(b=0) $n(c^2(n-1)+nh^2)/(c^2+h^2)$** **Equilátero $(4n^2-2n+1)/4$** Simétrico con centro cada vértice oposto a cada pé, do pé. Lim 4 e 6(inf). **Rectángulos 6.** **Equiláteros 25/4** N-simétrico no caso anterior **Rectángulos n(n+1) Equiláteros $(4n^2+4n+1)/4$ N1-simétricos....**	Lado oposto.
Circuncentro	Corte de mediatrices e lados. Formado con R = 1/4 Puntos medios R =1/4	Vértice oposto Puntos simétricos do circuncentro respecto aos vértices, R = 4 (G_V e..G_{IV})	Lado oposto Perpendiculares desde o circuncentro aos lados =1/4 (Córtanse nos puntos medios)
Calquera punto (x,y)	Xa analizados antes		
Punto exótico, de Fermat, de Ceva, Feuerbach, Gergonne, Lemoine		Vértice oposto	Lado oposto

(2) Se fixeramos simétricos do baricentro respecto aos lados -Límites -8/9
Rectángulos -8/9. Equilátero 1: Observar que este caso simplemente é aplicar o caso do pé da perpendicular e unha simetría. Se fosen n-simétricos teríamos (2(3n2-3n+1)/9),etc. Sobran polo tanto na táboa.

TÁBOA 2

Transformados por	*Desde*	*Corte*	*Desde*
Paralelismo	Vértices *R* = 4	Rectas 2 a 2	Outros puntos, pes das alturas,....
a-paralelismo m'= m+a	Vértices	Rectas 2 a 2 ***R* = 4**	Outros puntos, pes das alturas,...
ak-paralelismo Pendentes ak-paralelas m'=*k*(m+a)		Rectas 2 a 2 ak.paralelas pasando polos vértices	
k-paralelas m'= *k*m (caso particular do anterior)		**$R = (k+1)^2/k$** Rectas 2 a 2 pero un dos puntos de corte substitúese por un dos puntos ABC. Pode dar ***k*+1**, ou **(*k*+1)/k**.	
Perpendicularidade	Vértices		Outros puntos
Trisección (multisección) de ángulos=Morley	Vértices	Rectas 2 a 2	Outros puntos
Rectas formando un ángulo a cos lados	Cortes, rectángulo en B, $2\text{cotg}^2(a)+c*\text{cotg}(a)/h$	Rectas 2 a 2	

Xa só na TÁBOA 1 temos moitas amplas categorías... a investigar. Os resultados que poñemos aquí poden servir de base para comprobar que o método lle funciona ao lector... Pero pode imaxinar outros métodos distintos de xerar A'B'C'. Vimos tamén máis exemplos (TÁBOA 2).

Así podemos calcular o punto de Fermat, con centro nel, calcular os simétricos dos vértices, despois dese triángulo calculamos o ortocentro e os simétricos do ortocentro respecto aos lados, despois...

Consideracións finais

Realmente para rematar ben o artigo habería que estudar todos os casos de Edgar Brisse (3053), pero como dicía Descartes, o fundador da Xeometría Analítica, hai que deixar algo de traballo para a posteridade ou para os rapaces...[3]

Un bo texto para introducirse nas peculiaridades de *Derive* na programación e resolución de teoremas con triángulos é o de Miguel de Guzmán [1], xa que trae numerosas funcións xa resoltas e exemplos que poden servir como base para os problemas aquí propostos. De feito, coincidimos nas ideas sobre propoñer problemas, aínda que el se refire a casos máis xerais e abertos, neste artigo centrámonos nas relacións entre as áreas, véxase, por exemplo:

> *Una técnica general para proponerse preguntas (a veces interesantes)*
> *He aquí una técnica general para hacer-*

[3]Espero que a posteridade me xulgue ben, non só polas cousas que expliquei, senón polas cousas que omitín intencionadamente para deixar a outros o pracer de descubrir. (Rene Descartes)

se preguntas más o menos interesantes y obtener resultados nuevos alrededor de la geometría del triángulo. Se parte de un triángulo ABC y de un punto P de su plano (o bien de una recta P en el mismo plano). A partir de estos elementos se realizan operaciones simétricas, (simétricas significa aquí que la misma operación que se ha hecho con A, por ejemplo, se hace con B y C) respecto de los elementos del triángulo (lados, vértices,...). Se llegan a obtener así tres elementos (puntos o rectas) a los que llamamos tA(P), tB(P), tC(P). A veces estos elementos están alineados (si son puntos) o son concurrentes (si son rectas). Si lo son, se obtiene una relación interesante. Y si no lo son, se estudia el lugar de los P, o la envolvente de los P, tales que tA(P), tB(P), tC(P) están alineados o son concurrentes. Esta es la forma general en que surgen algunas relaciones y lugares curiosos en la geometría del triángulo.

Outro texto fundamental, para o tema que estamos a tratar, é o de Tomás Recio [2] no que se desenvolven axeitadamente e con máis profundidade as implicacións didácticas do método de demostración e descubrimento automáticos sobre todo no capítulo do mesmo título, (páx. 69-100), do que salientamos este resumo:

-la utilización del ordenador para la demostración y el descubrimiento de resultados podría ser una forma de recuperar el razonamiento geométrico en la enseñanza.

-proporcionando, además, un contexto significativo para la enseñanza de determinados aspectos de la manipulación algebraica (factorización, eliminación, simplificación de expresiones).

-mediante la traducción (de los resultados obtenidos por el ordenador) en términos lógicos (condiciones, necesarias, suficientes, superfluas, hipótesis complementarias, etc.) o geométricos.

Resumindo, debemos, podemos e queremos xogar coas matemáticas dende a tecnoloxía, indefinidamente.

Por último, dicir que a demostración automática de teoremas é un campo activo de investigación en España e en Galicia, no que son representantes destacados Tomás Recio, -do que o seu libro [2] é unha fonte interesante de reflexión sobre o cálculo Simbólico e Xeométrico na Secundaria, e os nosos colegas Francisco Botana e José Luis Valcárcel. Neste campo úsanse como test precisamente teoremas do triángulo. Espero que algúns destes resultados lles poidan servir nas súas investigacións (o mesmo que ao caro lector lle poida suxerir outras).

Referencias

[1] GUZMÁN, M. de (2002): La experiencia de descubrir en Geometría, Editorial Nivola, Madrid.

[2] RECIO, T. (1998): Cálculo simbólico y Geométrico, Síntesis, Madrid.

[3] BOTANA, F. (1998): “Novos recursos para o ensino das Matemáticas: Xeometría Dinámica”, Revista Galega do Ensino, 18, 171-183.

[4] QUESADA, A.R.: “New Mathematical Findings by Secondary Students”, en http://www.javeriana.edu.co/universitas_scientiarum/vol6n2/ART1.htm.

[5] SARMIENTO, A. (2001): “¿Cómo se fan matemáticas?”, GAMMA, 1, 9-12.

[6] KIMBERLING, C.: Encyclopedia of triangle centers..., en http://faculty.evansville.edu/ck6/ (1114 puntos no triángulo).

[7] BRISE, E.: “3053 puntos do triángulo coas súas fórmulas”, en http://pages.infinit.net/spqrsncf